چاپ دوم

ریاضیات

«محتوی، روش و اهمیت آن»

مؤلفان:
آلکساندروف . نیکلسکی . لاورنتیف

ترجمه: پرویز شهریاری

ریاضیّات

«محتوی، روش و اهمیّت آن»

فصول اول و دوم

نظر کلی به ریاضیات، آنالیز

تألیف

آ. د. الکساندروف ، م. ا. لاورنتیف

س. م. نیکولسکی

ترجمهٔ

پرویز شهریاری

چاپ این کتاب دریکهزار وپانصد نسخه درچاپخانه بانك بازرگانی ایران
در آذرماه ۱۳۳۸ بپایان رسیده است .

چند کلمه از مترجم

برای کسانی که علاقمند به مطالعات علمی باشند درزبان فارسی منابع زیادی وجودندارد. بخصوص درزمینه ریاضی تعداد اینگونه کتابها (اگر از کتابهای درسی صرفنظرشود) ازیکی و دوتاتجاوز نمی کند. مایه تأسف عمیق است که آثارپرارزش ریاضی دانان ایرانی‌هم مورد توجه ناشرین قرار نگرفته ودرحالی که روزانه‌چند کتاب‌باب و ناباب عرضه‌میشودحتی درسال کتابی‌ازین قبیل بچاپ‌نمیرسد وامروز اگر کسی بخواهداطلاعاتی ازاین نوشته‌ها پیدا کند یاباید بسراغ کتابهای خطی کم وبیش مغلوط برود ویا ترجمهٔ آنرا بیکی از زبانهای خارجی پیدا کند.

بهمین علت است که برای تدوین تاریخ ریاضیات‌ایران قدم اساسی برداشته نشده واغلب روشنفکران کشور ماحتی نام ریاضی‌دانان بزرگی چون‌محمدبن‌موسی‌الخوارزمی، جمشیدغیاث‌الدین‌کاشانی، خواجه‌نصیرالدین طوسی، ابوالوفای بوزجانی‌وغیره رانشنیده‌اند ویاشاید نمی‌دانند که حکیم عمرخیام قبیل ازهرچیز ریاضی‌دان ومنجم بوده‌است. رفع این‌نقیصه کاریك نفر و دو نفر نیست، دریـن راه بایستی دانشگاه، وزارت فرهنك و سایر موسسات دولتی و نیمه دولتی که بطور نسبی دارای امکانات کافی هستند

پیش‌قدم شوند وقسمتی ازبودجه خود رابااین قبیل مسائل اختصاص دهند.

ولی‌همانطور که گفتیم نقص اصلی در اینجاست که درمیان کتابهائی که منتشر میشود اصولا کتابهای‌علمی وبخصوص‌ریاضی جای بسیارناچیزی رااشغال‌می کند؛ درحالیکه‌مانباید ونمیتوانیم‌خود را ازجهان امروزی جدا کنیم‌وازپیشرفتهای علمی آن‌بر کنارنگه‌داریم وبهمین‌مناسبت است که هر کوششی درزمینه نشر کتابهای علمی انجام گیرد زیاد نخواهد بود.

***

درباره کتاب حاضرهیچ مقدمه‌ای جزخود کتاب نمیتواند معرف آن باشد ، ولی‌همینقدرلازم است گفته شود که این کتاب برای همه کسانی که بریاضی علاقمند باشند وریاضیات‌متوسطه راهم‌بدانند قابل فهم‌خواهد بود.

اصل کتاب درسه جلد و بیست فصل نوشته شده و امیدواریم توفیقی حاصل شود وبتدریج همه این کتاب جالب و بی‌نظیر دردسترس علاقمندان گذاشته شود.

***

وظیفه خودمیدانم که ازآقای‌مهندس ابوالفتحی که‌مشوق‌وراهنمای من درترجمه این کتاب بودند و آقای اردشیر وفاداری که مخارج چاپ آنرا بعهده گرفتند وکارگران چاپخانهٔ بانك‌بازرگانی که با وجود کمبود وسائل فنی ریاضی ، از هیچ کوششی برای بهتر شدن چاپ کتاب دریغ نکردند تشکر کنم.

آبان ۱۳۳۸ ـ پرویز شهریاری

مقدمه

ریاضیات در دوران باستان از احتیاجات عملی بشر بوجود آمد و به سیستمی از علوم مختلف تبدیل شد. ریاضیات نیز همچون علوم دیگر انعکاسی ازقوانین‌طبیعت بوده وبعنوان‌سلاح نیرومندی برای شناخت‌طبیعت وغلبه بر آن بکار میرود، ولی از آنجا که‌ریاضیات فوق‌العاده انتزاعی‌است، ، رشته های جدید آن برای کسانی که تخصص ندارند تا حد زیادی غیر قابل دسترس میباشد وهمین خصوصیت‌انتزاعی بودن ریاضیات‌ازروزگاران قدیم تصورات غیرعلمی درباره عدم ارتباط آن باطبیعت بوجود آورد.

هدف‌مؤلفین ازتدوین کتاب حاضر این‌بوده است که گروه وسیعی از روشنفکران رابامحتوی وروش قسمتهای مختلف‌ریاضی وپایه‌های عملی وطرق پیشرفت آن‌آشنا سازند.

حداقل معلومات ریاضی که برای خواننده این کتاب فرض شده ، ریاضی دوره‌متوسطه میباشد، معهذا مطالب این کتاب یکدست‌ویکنواخت نیست. کسانیکه میخواهند بمقدمات ریاضیات عالی آشنا شوند میتوانند ازچند فصل اول کتاب استفاده کنند ولی برای‌فهم دقیق‌فصول بعدبایستی با کتابهای درسی مربوطه آشنا باشند. مجموعه کتاب برای خوانندگانی مورد استفاده خواهد بود که به استعمال روشهای آنالیز ریاضی (حساب

دیفرانسیل وانتگرال) آشنا باشند. برای کسانیکه با علوم طبیعی سر و کاردارند، مهندسین رشته‌های مختلف و معلمین ریاضی، فصلهای مخصوصی وجوددارد که آنان‌را بارشته های جدیدتر ریاضی آشنامیسازد.

طبیعی‌است که‌درچهارچوب یك کتاب حتی‌همه‌انواع عمده بررسیهای ریاضی راهم نمیتوان شرح‌داد وبنابراین برای انتخاب مطالب کتاب نوعی آزادی عمل لازم بوده است. ولی در خطوط کلی‌تر، این کتاب بر رویهم تصوری‌درباره‌وضع‌معاصر ریاضی، پیدایش وتوسعه‌آن‌بدست‌میدهد. کتاب تا اندازه‌ای برای‌اشخاصی‌هم درنظر گرفته شده است که برمسائل اساسی که در کتاب مورد استفاده قرار گرفته است مسلط باشند. همچنین کتاب بایستی بتواند بعضی‌ازتنك نظریهائی راهم که گاهی بعضی از ریاضی دانان جوان‌ما ازخود نشان میدهند مرتفع کند

فصول جداگانه کتاب بوسیله مؤلفین مختلف نوشته شده است، با وجود این، مجموعه کتاب نتیجه یك کوشش دسته جمعی است. طرح کلی آن وانتخاب مطالب‌فصول‌مختلف درمعرض‌قضاوت دسته‌جمعی قرارگرفته وبراساس تبادل زنده‌افکار تکمیل شده‌است .ریاضی‌دانان بسیاری‌ازشهرهای اتحادشوروی‌دربحثی که‌بوسیله انستیتوی‌ریاضی‌ترتیب داده شده‌بود شرکت کرده ودراطراف متن مقدماتی آن تذکرات‌ذیقیمتی دادند، این‌تذکرات وپیشنهادات هم‌از طرف مؤلفین درنظر گرفته شده‌است.

همچنین‌بعضی ازمؤلفین درتهیه متن نهائی فصولی‌که بوسیله مؤلفین‌دیگر نوشته شده‌است‌مستقیماً شرکت کردند: قسمت‌اساسی‌مقدمه‌فصل‌دوم را ب . ن. دلن B.N.Délon نوشته استو د. ك. فادیف D.K. Fadéev در

تهیه‌فصول چهارم و بیستم فعالانه‌شرکت کرده است .

همچنین عده ای از کسانی که فصل جداگانه ای تهیه نکرده‌اند درکارتهیه کتاب شرکت‌داشته‌اند:ل.ب. کانتارویچ L.B.Kontorovitch قسمت چهارم‌از فصل چهاردهم‌و ا. آ. لادیژنسکایا O·A·Ladigenskaïa قسمت ششم ازفصل ششم‌و آ. گ. پاستنیکوف A·G·Postnikov قسمت پنجم ازفصل دهم‌رانوشته‌اندو ا.آ. آلی‌نیک O·A·Oleinik درتهیه متن فصل پنجم و یو.و. پروخوروف U.V·Prokhorov درآخرین‌بررسی متن فصل یازدهم شرکت داشته‌اند .

و. آ. زالگالر V.A·Zalgaler بعضی‌ازقسمتهای‌فصول‌اول ودوم وهفتم وهفدهم رانوشته‌است وآخرین بررسی متن کتاب بوسیله زالگالر و ویدنسکی Videnski وباشرکت ت. و. راگازکینا T·V·Rogozkina و آ . پ . لئونوا A.P·Léonova انجام گرفته است . قسمتهای اساسی تصاویر بوسیله ا. پ. سنکینی E·P·Senkini رسم شده است .

هیئت تحریریه

۱

خصوصیات ریاضی

۱ـ حتی باآشنائی خیلی‌سطحی هم‌میتوان خصوصیات اصلی ریاضیات رامشاهده کرد : این خصوصیات عبارتند از : اولا انتزاعی بودن آن ، ثانیاً دقت (ویا صحیح‌تر دقت منطقی) یعنی الزامی بودن نتایج‌آن وبالاخره وسعت بی‌اندازه مورداستعمال‌آن.

انتزاعی‌بودن حتی درحساب ساده هم دیده میشود . مااعداد مجردرا بکار میبریم بدون اینکه هربار بارتباط آنها با اشیاءِ مشخص توجه نمائیم ؛ در مدرسه جدول ضرب انتزاعی را یاد میگیریم ، جدولی که اعداد را بطور کلی در هم ضرب میکند نه عده اطفال را درعده سیبها ویاعده سیبها را درقیمت سیب وغیره

در هندسه هم چنین است : مثلا خطوط مستقیم بررسی میشود و نه نخهائی که محکم کشیده شده باشد . ضمنا در مفهوم خط هندسی ، هرگونه خاصیت دیگری جز امتداد از آن سلب شده است. مفهوم کلی دربارهٔ شکل‌هندسی باین ترتیب بدست‌میآید که شیئی واقعی را از همهٔ خواصی که دارد بجز شکل فضائی و اندازه‌های آن منتزع کنیم .

اینگونه انتزاعات خصیصه همه ابواب ریاضی است ومفاهیم عدد صحیح وشکل هندسی، ابتدائی‌ترین آنها را تشکیل میدهد. پس ازاین‌مفاهیم ساده، انتزاعات‌فراوان دیگری قرار دارد که بزحمت میتوان آنها را توضیح داد وبآن درجه از انتزاع میرسد که‌اعداد مختلط ، توابع ، انتگرالها ، دیفرانسیلها ، فونکسیونلها، فضاهای n بعدی و حتی بی نهایت بعدی وغیره را بوجود میآورد . این مفاهیم از نظرانتزاعی بودنشان هر یك در مرحلهٔ بالاتری نسبت بدیگری قرار داشته وبچنان حدی از انتزاع رسیده‌اند که بنظر میرسد هرگونه ارتباط بازندگی را از دست داده‌اند تاجائیکه بنظریك«آدم

ساده و معمولی» چیزی دربارهٔ آنها نمیتوان گفت بجز اینکه «همهٔ آنها نامفهومند» .

البته درحقیقت اینطورنیست. اگرچه فضای n بعدی خیلی‌انتزاعی بنظر میرسد ولی در عین حال دارای محتوی‌کاملا واقعی است که درك آنهم آنقدرها مشکل نیست . دراین کتاب‌بخصوص روی‌درك حقیقی مفاهیم انتزاعی مذکورتکیه شده وخواننده‌متقاعد خواهد شد که همه آنها چه ازنظرمنشاء وچه از نظرکاربرد وموارد مصرفشان بزندگی مربوطاند .

انتزاع ریـاضی را میتوان بدین ترتیب مشخص نمود : اولاً وقبل از همه روابط کمی واشکال فضائی را حفظ کرده وآنها را ازهمه خواص دیگر موجود جدا میکنند ، ثانیاً انتزاع ریاضی ازیك سلسله درجات بوجود آمده است : انتزاع ریاضی از انتزاعی که درعلوم طبیعی معمول است خیلی جلوتر میرود، (این‌دومطلب را بعداً وبطورمفصل ضمن مثالهای مربوط بمفاهیم اساسی ریاضیات یعنی عدد وشکل روشن خواهیم کرد) و بالاخره‌این مطلب بچشم میخورد که موضوع ریاضیات درمجموع وتقریباً بطور کامل در اطراف مفاهیم انتزاعی وروابط‌آنها دورمیزند . اگریك عالم طبیعی‌برای‌اثبات نظریاتش دائماً بتجربه مراجعه میکند ، عالم ریـاضی قضایا را تنها از طریق محاسبه و استدلال اثبات مینماید .

البته علمای ریاضی هم ، برای کشف قضایا وروشهائی که بکار میبرند ، دائماً از نمونه‌ها ومعادلهای فیزیکی آنها استفاده میکنند وبمثالهای متعدد جداگانه‌ای که‌کاملا مشخص باشند مراجعه مینمایند و غیره . همه اینها کمك میکنند تا قضیه‌ای کشف ویا منشاء حقیقی آن روشن شود ولی یك قضیه تنها وقتی در ریاضیات دارای اعتبار میشود که دقیقاً و با استدلال منطقی اثبات شده باشد . اگر یك عالم هندسه که دربارهٔ قضیهٔ تازه‌اش گزارش میدهد، آنرا روی نمونه‌ای نمایش داده‌وتنهابهمان اکتفا کند ، هیچیك از ریاضی‌دانان قضیه را اثبات شده تلقی‌نخواهند کرد . لزوم اثبات قضایا ، که درهندسه متوسطه‌هم‌بخوبی‌دیده میشود، درمورد همه ریاضیات‌صادق‌است. مامیتوانیم زوایای‌مجاور بقاعده هزاران‌مثلث متساوی‌الساقین رابادقت‌کامل اندازه بگیریم، ولی‌این اندازه گیری نمیتواند **اثبات ریاضی قضیه** ای را بما بدهد که بموجب آن : « زوایای مجاور بقاعده مثلث متساوی‌الساقین باهم برابرند.» ریاضیات چنین طلب میکند که این نتیجه را از مفاهیم اساسی هندسه بیرون بکشیم (امروزه برای بیان دقیق هندسه این مفاهیم اساسی را در اصول متعارفی دقیقاً خلاصه کرده‌اند) وباین ترتیب : اثبات یك قضیه‌برای ریاضی دان این معنی را میدهد که آنرا ازطریق بحث دربارهٔ خواص‌ابتدائی، که برای مفاهیم مورد استفاده این قضیه ذاتی هستند ، بیرون بکشد . بنابراین نه تنها مفاهیم ریاضی بلکه روش آنهم انتزاعی وذهنی است .

ازوجوه امتیاز نتیجه‌گیریهای ریاضی دقت منطقی وفوق‌العاده آنست : استدلال ریاضی دارای آنچنان دقتی است که برای هر کسی که آنرا بفهمد مسلم ومتقاعد کننده است. این‌مطلب که‌استدلال ریاضی‌دقیق ومتقاعد کننده است حتی ازدورهٔ مدرسه‌متوسطه هم‌کاملا بچشم میخورد ، خود واقعیات ریاضی هم انکار ناپذیرند ، تصادفی نیست که می گویند: «ثابت کردن‌مثل‌دودوتاچهارتاست»، درا ینجابخصوص‌رابطهٔ‌ریاضی ٤ $= ۲ \times ۲$ بعنوان حقیقت مسلم وانکارناپذیر بکار رفته است. ولی دقت ریاضیات هم مطلق نیست: ریاضیات پیش میرود وقوانین آن یکبار وبرای همیشه منجمد نمیشود ؛ قوانین ریاضی تغیرمیکنند ومیتواند بموضوع موردبحث علوم خدمت کند وخدمت هم میکنند.

درتحلیل آخر **منبع زنده‌بودن ریاضیات دراینجاست که‌مفاهیم و نتایج آن با همهٔ انتزاعی بودنشان ، بطوریکه خواهیم دید ، ناشی از واقعیت بوده وموارد استعمال فراوان در سایر علوم ، در صناعت و در همهٔ امور مربوط بزندگی پیدا میکند و این مهم‌ترین مطلب برای درك ریاضیات است .**

وسعت استثنائی وفوق‌العاده موارد استعمال ریاضیات هم‌یکی دیگرازخصوصیات ویژه Caractéristique آن میباشد .

اولا ، ماهمیشه وهرساعت : درتولید، درزندگی وزندگی‌اجتماعی‌وسیع ترین و عمومی‌ترین‌مفاهیم ونتایج‌ریاضی‌رابکارمیبریم‌بدون‌اینکه دراین‌باره‌فکر کنیم، باین‌ترتیب که وقتی حساب روزها ویا مخارج را نگاه میداریم از حساب ووقتی که سطح مربع را محاسبه میکنیم ازنتایج هندسه استفاده میبریم. این نتایج خیلی ساده‌اند ولی یادآوری این‌مطلب مفید است که‌زمانی، دردوران باستان، وقتی که علم ریاضی تازه بوجود میآمد اینها در ردیف بزرگترین موفقیتها بشمار میرفت .

ثانیاً، تکنیك معاصر بدون وجود ریاضی غیرممکن است . بدون محاسبات کم و بیش بغرنج حتی یك پیشرفت فنی هم‌بانجام نمیرسد . ریاضیات در توسعه و پیشرفت رشته‌های جدید تکنیك هم نقش بسیار مهمی را بازی میکنند .

بالاخره ، تقریباً همهٔ علوم بطورکم وبیش اساسی از ریاضیات استفاده میکنند. قوانین «علوم دقیقه» ــ مکانیك ، نجوم ، فیزیك و تاحد زیادی شیمی ــ معمولا بوسیلهٔ فرمول بیان میشود (واین‌چیزی‌است که اززمانی که روی نیمکت مدرسه نشسته بودیم بآن آشنا هستیم) وتئوریهای آنها بااستفاده وسیع از دستگاه ریاضی پیشرفت میکنند ، بدون ریاضیات پیشرفت‌این علوم غیرممکن است وبهمین‌علت است که‌احتیاجات‌مکانیك، نجوم وفیزیك در تکامل‌ریاضیات همیشه تأثیر قطعی ومستقیم داشته است .

درعلوم دیگر نقش ریاضیات کمتراست ولی درآنجاها هم‌مورد استفاده‌های مهمی پیدا میکند ، البته اسلوب ریاضی را نمیتوان همانطور که درمورد فیزیك بکار میرود در پدیده‌های بغرنجی همچون پدیده‌های زیست شناسی و جامعه شناسی بکار برد ، بکار بردن ریاضی دراینگونه موارد بمعنای مربوط کردن پدیده مشخص با تئوری کلی است. ذکر این مطلب لازم است که نباید سرگرم بازی ساده‌بافرمولها شد ، کاری که بدنبال آن هیچگونه مضمون واقعی وجود ندارد، ولی بهر صورت ریاضیات تقریباً درهمهٔ‌علوم از مکانیك گرفته تاعلم اقتصاد مورد مصرف پیدا میکند .

چند نمونه بسیاردرخشان مورد استفادهٔ ریاضیات را درعلوم دقیقه وتکنیك‌بخاطر آوریم :

یکی‌ازدورترین‌سیاره‌های‌منظومهٔ شمسی‌یعنی‌نپتون‌درسال۱۸۴۶براساس‌محاسبات ریاضی‌کشف‌شد .آدامس Adams ولووریه Leverrier ضمن‌بررسی بی‌نظمی حرکت ارانوس باین نتیجه رسیدند که این بی‌نظمی در اثر جاذبه سیارهٔ دیگری بوجود آمده است. لووریه براساس قوانین مکانیك وقانون جاذبه موضع‌این سیاره را محاسبه وتعیین کرد و راصدی که لووریه این مطلب را باو اطلاع داده بود ، سیاره را درهمان محل با تلسکوپ مشاهده کرد . این کشف نه تنها پیروزی مکانیك ونجوم و بخصوص دستگاه کوپرنیك بود ، بلکه پیروزی محاسبات ریاضی هم بشمار میرود .

مثال دیگری که کمتر ازمثال‌اول‌مهم نیست، کشف‌امواج‌الکترومغناطیسی‌است. ماکسول Maxwell فیزیکدان‌انگلیسی‌ضمن تعمیم‌قوانین پدیده‌های الکترومغناطیسی که در اثر تجربه بدست آمده بود ، آنها را بصورت معادلات بیان کرد . از روی این معادلات وبامحاسبه‌صرفاًریاضی نتیجه گرفت که قاعدتاً باید امواج الکترومغناطیسی که با سرعت نور منتشر میشود وجود داشته باشد . ماکسول با تکیه باین مطلب تئوری الکترومغناطیسی نوررا پیشنهاد کرد که بعدها بطورهمه جانبه‌ای پیش رفت و برشالوده محکمی قرار گرفت . اما علاوه براین نتیجه گیری، ماکسول تحقیقات مربوط باامواج الکترومغناطیسی‌را که‌منشاءِ صرفاًالکتریکی‌دارد مثل‌نوساناتی که‌ضمن تخلیه‌الکتریکی منتشر میشود ـ تکامل داد ؛ این امواج در حقیقت بوسیلهٔ هرتز Hertz کشف شد . بزودی آ. س. پوپوف Popoff وسیلهٔ تحریك ، ارسال و ضبط نوسانات الکتریکی‌را پیدا کرد وآنها را بمرحلهٔ عمل و استفاده وسیع رسانید و همین امر پایه رادیو تکنیك را بنا نهاد . دراختراع رادیو ،که حالا دیگر دردسترس عموم قرار گرفته است، نتیجه گیریهای صرفاً ریاضی هم نقش مهمی بازی کرد .

باین ترتیب ، علم از مشاهده ـ و مثلا مشاهده انحراف عقربهٔ مغناطیس در اثر

جریان الکتریسته ـ شروع میشود وبسمت تعمیم، بسمت تئوری ، بسمت قوانین فرموله شده وبیان ریاضی آنها میرود و این‌قوانین نتایج جدیدی ببار میآورد که بنوبهٔ خودبرای تکامل تئوری محرك نیرومند جدیدی بشمار میرود .

بخصوص جالب توجه است که حتی انتزاعی ترین مفاهیم ریاضی ، که در داخل خود ریاضیات بوجود آمده و محرکی ازطرف علوم طبیعی ویاتکنیك نداشته‌اند ، نیز موارد استفاده عملی کاملا ثمربخشی پیدا کرده‌اند ؛ مثلا اعداد موهومی در دنیای جبر بوجودآمد و تا مدتها مفهوم حقیقی آنها ناشناخته باقی ماند و بهمین علت هم آنها را موهومی‌نامیدند . ولی بعداً وقتی که در ابتدای قرن گذشته تعبیر هندسی آنها داده شد (این‌مطلب بعداًودرفصل‌پنجم‌شرح‌داده‌شده‌است)،اعداد موهومی‌مقام استواری درجبر پیدا کردندونظریهٔ کلی‌توابع بامتغیرمختلط (یعنی‌با متغیربشکل $x+y\sqrt{-1}$) بوجودآمد. این تئوری‌علی رغم نامی که روی‌آنست (توابع «موهومی» ازمتغیرهای «موهومی»)کاملا غیرموهومی بوده وبعنوان یك وسیلهٔ کاملا حقیقی برای حل مشکلات تـکنیك بکار میرود ، درست با کمك همین تئوری‌است که قضیه اساسی ن . ی . ژوکوفسکی مربوط بقدرت صعود بال هواپیما ثابت میشود ، همچنین این تئوری مثلا در حل مسئلهٔ مربوط به تراوش آب زیر سدها مورد استفاده پیدا میکند ، مسئله‌ای که اهمیت آن در عصر ساختمان سدهای عظیم هیدروالکتریك (برق آبی) روشن‌است.

هندسه غیراقلیدسی نمونهٔ روشن دیگری ازاین قبیل‌است[1] هندسه غیراقلیدسی برزمینه هزاران سال کوششی که اززمان‌اقلیدس برای‌اثبات اصل‌توازی انجام میگرفت، بوجود آمد . یعنی از مسئله‌ای بوجود آمد که کشش صرفاً ریاضی داشت . ن . ای . لباچوسکی Lobatchefski کـه طرح این هندسه جدید را ریخت محتاطانه نام آنرا «تخیلی» گذاشت زیرا نمیتوانست معنای حقیقی آنرا نشان دهد . اگرچه مطمئن بود که این معنا بالاخره پیدا خواهدشد . نتیجه گیریهای هندسه او نه تنها «تخیلی»بلکه حتی‌غیرقابل تصوروپوچ بنظرمیرسید. باوجوداین، افکارلباچوسکی مبداءِ پیشرفت های جدیدی در هندسه و بوجود آمدن تئوری فضاهای مختلف غیر اقلیدسی شد و بعدها بعنوان یکی از اصول تئوری نسبیت عمومی بآن خدمت کرد . ضمناً باید دانست که دستگاه ریاضی تئوری نسبیت را یکی از انواع هندسه غیر اقلیدسی فضای چهار بعدی تشکیل میدهد . باین ترتیب حتی آن مفاهیم انتزاعی ریاضی کـه زمانی غیرقابل فهم بنظر میرسید بدستگاه نیرومندی برای توسعه و تکامل یکی از مهمترین تئوریهای

۱ ـ در اینجا این نمونه را ذکر میکنیم ؛ بدون اینکه در صدد توضیح در باره آن باشیم . خواننده میتواند توضیح آنرا درفصل هفدهم کتاب پیدا کند .

فیزیکی تبدیل شد . بهمین ترتیب در تئوری جدید پدیده های اتمی موسوم بمکانیك کوانتائی بسیاری از مفاهیم کاملا انتزاعی ریاضی و مثلا مفهوم فضای بی‌نهایت بعدی و غیره بطور جدی مورد استفاده قرار میگیرد .

احتیاجی نیست که خود را درمثالهای متعدد گم کنیم، باندازهٔ کافی تأکید کردیم که ریاضیات در زندگی روزمره ، در تکنیك ودرعلوم مورد استفاده وسیع دارد ، ضمناً بسیاری از تئوریهائی که در درون خود ریاضیات بوجود آمده وتوسعه پیدا کرده است ، در علوم دقیقه و بسیاری از مسائل مربوط به تکنیك مورد استفاده پیدا میکند . چنین است یکی از خصوصیات مشخصهٔ ریاضی که در عین انتزاعی بودن دارای نتیجه گیریها دقیق ومتقاعد کننده است .

۳ ـ البته باذکر همهٔ این خصوصیات، ماهیت‌ریاضی را روشن نکرده‌ایم، بلکه بآثار خارجی آن توجه کرده‌ایم . میخواهیم این خصوصیات را روشن کنیم ، برای این کار لااقل باید بسئوالات زیر جواب بدهیم :

مفاهیم انتزاعی چه چیزی را منعکس میکنند ؟ بعبارت دیگر موضوع حقیقی ریاضی چیست ؟

چرا نتیجه گیریهای انتزاعی ریاضی تااین حد متقاعد کننده ومفاهیم‌ابتدائی‌آن تا این حد روشن اند ؟ بعبارت دیگر اساس اسلوب ریاضی در چیست ؟

چرا ریاضیات باوجود همه انتزاعی بودنش تنها بازی مشغول کننده با مجردات نبوده ووسیع‌ترین مورد مصرفها را پیدا میکند؟ بعبارت دیگر اهمیت ریاضیات از کجا ناشی میشود ؟

بالاخره ، چه نیروهائی ریاضیات را بجلو میبرد و بآن اجازه میدهد که انتزاع را با مورد مصرف وسیع بهم مزبوط کند؟ بعبارت دیگر محتوی سیر Procès ریاضیات چیست ؟

با جواب دادن باین سئوالات میتوانیم تصور کلی دربارهٔ موضوع ریاضی ، دربارهٔ اصول روش آن ودربارهٔ اهمیت وپیشرفت‌آن بدست بیاوریم ، یعنی ماهیت آنرابفهمیم.

طرفداران نظریات غیرعلمی در فلسفه ، نه تنها درحل این مسائل اساسی سردر گم میشوندبلکه حتی کارشان بمقلوب کردن ریاضی میکشد ودرواقع آنرا وارونه‌جلوه میدهند. این‌افراد ازیکطرف انتزاعی بودن بی‌اندازه ریاضیات واز طرف دیگرخاصیت متقاعد کننده‌آنرا می‌بینند وبهمین جهت خیال‌میکنند که ریاضیات‌ازتفکرخالص‌بوجود آمده‌است .

ولی درحقیقت ریاضیات هیچگونه مبناواساسی برای نظریات غیرعلمی بدست نمیدهد بلکه درست برعکس ، اگر روابط و تکامل ریاضیات را بطور عینی در نظر بگیریم تایید درخشانی از نظریات فلسفه علمی خواهدبود وباهرقدمی که بجلو برمیدارد نظریات غیرعلمی را رد میکند ، ماوقتی که در خطوط کلی بسئوالات بالا - سئوالاتی که دربارهٔ ماهیت ریاضیات طرح کردیم - جواب دادیم بصحت این مطلب یقین خواهیم کرد . جواب باین سئوالات همچنین مارامتقاعد خواهد کرد که استنباط کلاسیکهای فلسفه علمی دربارهٔ ریاضیات ودربارهٔ طبیعت علم وبطور کلی شناخت درست است . برای اینکه درمورد این سئوالات به نتایج مقدماتی برسیم کافی است که اصول حساب وهندسه مقدماتی رابررسی کنیم و ما نیز همین کار را خواهیم کرد . البته اگردقت بیشتری در ریاضیات بکنیم ، مطلب عمیق‌تر و تکمیل‌تر میشود ولی هرگز آنچه راکه در این نتیجه گیریها بدست خواهیم آورد ردنخواهد کرد .

۲

حساب

۱ـ مفهوم عدد (فعلاتنها دربارهٔ اعداد صحیح ومثبت صحبت میکنیم)، مفهومی که اینقدر برای ماعادی است ، خیلی بکندی بوجود آمده است . دراین باره میتوان لااقل ازروی روش‌عدد شماری مردمی که تاهمین اواخر، درمدارج مختلفی از رژیمهای اولیه اجتماعی قرار داشتند ، قضاوت نمود . بعضی ازآنها حتی برای اعداد بزرگتر از دو یا سه نامی نداشتند ، بعضی دیگر عدد شماری را جلوتر میبردند ولی در هرحال عدد شماری بطور نسبی خیلی زود تمام میشد و برای اعداد بزرگتر بسادگی میگفتند «زیاد» یا «بیشمار» . این مطلب نشان میدهد که ذخیره اعداد منفرد بتدریج نزد ملتها بوجود آمده است .

باوجودیکه‌مردم‌میتوانستندخودبخود درباره مقدار واندازه مجموعه‌های مختلف اشیائی که‌درعمل‌باآنهابرخورد میکردند، قضاوت کنند، درابتداتصوری‌دربارهٔ عددنداشتند باید تصور کرد که عدد مستقیماً وبعنوان خاصیت تفکیك ناپذیر مجموعه‌ای ازاین و یا آن شیئی، درك میشد وبطور روشن ومشخص ازاین مجموعه جدا نمیشد. ماچنان بشمار عادت کرده‌ایم که بزحمت میتوانیم تصور این مطلب را بنمائیم ولی فهمیدن آن مشکل نیست . [۱]

۱ - درحقیقت هر مجموعه‌ای از اشیاء ، خواه گلهٔ گوسفند باشد یاتوده هیزم ، وجود خارجی دارد و به همان‌شکل مشخص و در عین‌حال مرکب خود درك میشود . تشخیص خواص و روابطی که در این مجموعه وجوددارد موقعی تشخیص داده میشود که تجزیه وتحلیل معینی ازآن بشود ، درحالیکه طرز تفکر ابتدائی بشر اجازهٔ چنین تجزیه و تحلیلی را نمیدهد وشیئی رافقط در مجموع خود ، (بعنوان يك مجموعه) درك میکند ، همچون شخصی که بموزیك آشنا نیست نمیتواند اجزاء ملودیها و آهنگها وغیره را در آثار موسیقی از هم جدا کند ، در صورتیکه يك موسیقی دان حتی سمفونیهای بغرنج را هم تجزیه و تحلیل میکند .

در مرحلهٔ بعدی اعداد بخاصیت مجموعه اشیاء بدل میشود ولی هنوز بعنوان «عدد مجرد» یعنی عدد بطور کلی ، عددی که باشیاء معین مربوط نباشد ـ از مجموعهٔ اشیاءِ جدا نمیشود این مطلب را در نامهائی که بعضی‌ملل باعداد داده‌اند نیزمیتوان‌دید، مثل « پنجه » برای پنج و «آدم» برای بیست و غیره . در اینجا پنج مجرد مورد بحث نیست ، بلکه مثل‌اینست که بگویند «باندازه‌انگشتانی که در یك دست است» ودرمورد بیست «باندازه همه انگشتانی که یك آدم دارد»وغیره . درست بهمین نحو بعضی ازملل مثلا مفهوم «سیاهی» ، «سختی» و «گردی» نداشته‌اند ، آنهابرای اینکه بگویند فلان شیئی سیاه است ، آنرا به کلاغ تشبیه میکردند وبرای اینکه بگویند پنج شیئی وجود دارد ، این اشیاءِرا مستقیماً با انگشتان دست مقایسه میکردند. گاهی هم اسامی اعداد برای شمردن اشیاءِ مختلف‌نامهای جداگانه داشتند : برای شمارش آدمها اسامی‌خاصی از اعداد وبرای شمارش قایقها نامهای دیگری داشتند و بهمین ترتیب دهها نوع‌مختلف عدد شماری داشتند ؛ در اینجا اعداد مجرد وجود ندارد، اینها «اسمائی» هستند که‌تنها برای شمارش‌نوع معینی از شیئی‌بکار میرود دربین بعضی‌ملل برای اعداد اصولا نام‌های جداگانه‌ای وجود ندارد و مثلا با وجودیکه میتوانند بگویند «سه‌آدم» ، «درسه‌محل» وغیره ؛ عدد «سه» درزبان آنها وجود ندارد .

این مطلب شبیه بآنست که ما بسادگی میگوئیم که این یاآن شیئی سیاه است در حالیکه بندرت دربارهٔ خود «سیاهی» ، که مفهومی کاملا انتزاعی است ، صحبت میکنیم .[۱]

درحقیقت شماره اشیاء خاصیتی است که مربوط بیك مجموعه معین میباشد ، در حالیکه عدد ، بعنوان «عدد مجرد» ، خاصیتی است که از مجموعه‌های‌مشخص جداشده و فی نفسه قابل تصور است همانطور که «سیاهی» ، «سختی» و غیره قابل تصور است . همانطور که‌سیاهی‌خاصیت کلی همهٔ‌اشیائی‌است که رنگ زغال‌دارند ، همانطورهم «پنج» خاصیت کلی‌همهٔ مجموعه‌هائی‌است که بتعداد انگشتان یك دست دارای شیئی میباشند ضمناً خود تساوی عددی هم از راه مقایسه ساده بدست میآید : همانطور که یك عدد

۱ ـ در مورد بوجود آمدن‌مفهوم‌خواص اشیاء ؛ خواه‌رنگ‌چیزی وياشمارهٔ‌مجموعه‌ای‌باشد، میتوان سه مرحله تشخیص داد که البته نمیتوان این مراحل راکاملا از هم جدا نمود : در مرحلهٔ اول ، این خاصیت از راه مقایسه مستقیم با اشیاء معین میشود : مثلا میگویند برنك کلاغ است ؛ به اندازهٔ انگشتان یك دست است . در مرحله دوم بشکل صفت ظاهر میشود مثل سنك سیاه ویا به شکل شماره مثل پنج درخت و غیره . در مرحلهٔ سوم ، خاصیت از شیئی جدا میشود ومیتواند بصورتی مانند «سیاهی» ویاعدد مجرد «پنج» وغیره مجسم شود .

ازشیئی را ازمجموعه موردنظر برمیداریم یکی از انگشتان خود را خم کرده و بدین ترتیب آنهارا باکمك انگشتان‌خود شماره‌میکنیم . بطور کلی مقابلهٔ آحاد دو مجموعه میتواند نشان دهد که‌آیا تعداد اشیاءآنها برابراست یانه ؟ (بدون‌اینکه از شمار استفاده کنیم) ، مثلا وقتیکه مهمانان پشت میزقرار میگیرند ، اگر صاحبخانه میز را باندازهٔ یك نفرکم چیده باشد ، بدون اینکه کسی مهمانان را بشمارد بسادگی این فراموشی روشن میشود ، زیرا یکی از مهمانان بدون وسیلهٔ پذیرائی باقی میماند .

بنابراین میتوان عدد را بطریق زیر تعریف کرد : **هرعددمشخصی مانند «دو»،پنج‌وغیره‌عبارتست‌ازخاصیتی که برای‌همهٔ‌مجموعه‌هائی که بتوان آحاد آنهارا باهم‌مقابله نمودیکسان بوده‌و برای آن‌مجموعه هائی که درمورد آنها این مقابله ممکن نیست ، یکسان نباشد .**

برای‌اینکه‌این خاصیت عمومی‌را کشف وکاملاجدا کنیم یعنی برای اینکه‌مفهوم اعداد جداگانه را ایجاد کرده ونام «شش» ، «ده» وغیره را بآنها بدهیم ، بایستی تعداد زیادی مجموعه را باهم مقایسه کرده باشیم : نسلهای بسیاری شمرده‌اند ویك عمل معین را میلیونها بار تکرار کرده‌اندتااینکه‌ضمن‌عمل‌اعداد وروابط بین آنها را کشف کرده‌اند.

۲ ـ اعمالی که روی اعدادانجام میگیرد بنوبهٔ خود انعکاسی ازاعمال واقعی‌روی اشیاءِ مشخص‌است، این‌مطلب را ازاسامی اعداد هم میتوان احساس کرد . مثلابعضی از بومیان آمریکا عدد «بیست وشش» رابشکل «من‌شش را روی دوبرابر ده گذاشته‌ام»تلفظ میکنند ، روشن است که در اینجا روش مشخص شماره کردن اشیاء منعکس میشود . ضمناً روشن است که جمع‌اعداد، متناظر باروی‌هم‌ریختن یعنی تبدیل دو یاچند مجموعه بصورت یك مجموعهٔ واحد است . بهمین ترتیب بسادگی مفهوم مشخص تفریق ، ضرب وتقسیم دیده میشود (بخصوص واضح است که ضرب تاحد زیادی عبارتست‌ازمحاسبهٔ دو، سه ویاچند مجموعه مساوی) .

درجریان تکاملی‌شمار نه تنهامردم روابط بین اعداد جداگانه را کشف میکردند ویاد میگرفتند که مثلادو وسه‌میشود پنج، بلکه بتدریج‌قوانین کلی‌هم‌بدست‌می‌آوردند: در عمل کشف شد که حاصل جمع به ترتیب اجزاء جمع ارتباطی نداردو یا نتیجهٔ شمار اشیاء مفروض باین مربوط نیست که این شمار با چه ترتیبی انجام بگیرد . (این وضع در مقایسهٔ اعداد «ترتیبی» ، (اولین ، دومین وغیره) با اعداد «اصلی» (یك ، دو و غیره) تظاهر میکند) ، بنابراین اعداد نه بطور مستقل وجداگانه ، بلکه در ارتباط با یکدیگر بصحنه وجودآمدند .

بعضی اعداد حتی درخواندن ونوشتن هم بوسیلهٔ اعداد دیگر بیان میشوند ، مثلا درزبان روسی «بیست» را «دو (مرتبه) ده» ودر زبان فرانسه ۸۰ را «چهار بیست تا» و۹۰ را «چهار بیست تا وده» میگویند ویا فی المثل ارقام رومی VIII و IX باین معنی است که ۳+۵=۸ و ۱۰-۱=۹

بطور کلی باید گفت که اعداد بشکل منفرد وجداگانه بوجود نیامده‌اند ، بلکه **سیستم** اعداد همراه باروابط وقوانین مربوطه‌شان بوجود آمده‌اند .

موضوع حساب بخصوص عبارتست ازسیستم اعدادوروابط و قوانین آنها [1] . عدد مجرد منفرد فی‌نفسه دارای خواصی که مربوط بمحتوی آن باشد نیست وبنابراین دربارهٔ چنین عددی خیلی کم‌میتوان صحبت کرد . اگر فی‌المثل دربارهٔ خواص عدد ۶ از خود سؤال کنیم ، می‌بینیم که ۶=۱+۵ و ۶=۲×۳ ویا ۶ یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد۳۰ است وغیره ، اما در همهٔ این‌موارد عدد۶ بسایر اعداد مربوط میشود بطوریکه خاصیت هرعدد ، مخصوصاً در روابطی که با سایر اعداد دارد معین میگردد [2] علاوه براین واضح است که هر عمل مربوط بحساب ، رابطه و یا بزبان دیگر نسبت بین اعداد را معین میکند .

بنا براین حساب، با روابط بین اعداد سر وکار دارد ، ولی روابط بین اعداد شکل انتزاعی روابط کمی‌است که درواقع بین مجموعهٔ‌اشیاء وجود دارد وبنابراین میتوان گفت که **حساب علم‌روابط کمی وواقعی‌است که آنها را بصورت کاملا مجرد بررسی میکند .**

همانطور که می‌بینیم حساب ، آنطور که طرفداران نظریات غیرعلمی میکوشند نشان دهند ، از تفکر خالص بوجود نیامده است بلکه انعکاسی از خواص معین اشیاء واقعی است ودر نتیجه تجربه عملی‌طولانی‌نسلهای زیادی بوجود آمده است .

۳ ـ هرقدر که امور عملی‌اجتماع وسیع‌تر و بغرنج‌تر میشد مسائل وسیع تری

۱ ـ کلمهٔ «Arithmétique» (حساب) از کلمهٔ یونانی «Arithmos» به معنای‌شمار و«Tekhnê» بمعنای فن آمده است وبنابراین یعنی فن شمار .

۲ ـ این مطلب را از روی کلی‌ترین مفاهیم هم میتوان درك کرد ؛ هرمفهوم مجرد وقتی که از پایه‌خود و موردمشخص خود جدا شده‌باشد– مثل عددکه ازمجموعهٔ اشیاء جدا شده است– بخودی خود قابل درك نیست چنین انتزاعی تنها درارتباط باسایر مفاهیم ؛ زندگی میکند و این ارتباط درهربیان ویاتعریف ناقصی از آن نیز وجود دارد یعنی یك مفهوم مجرد انتزاعی خارج از این روابط هیچگونه معنی ومضمونی پیدا نخواهد کرد یعنی اصلا وجود نخواهد داشت . مفهوم عدد مجرد هم در قوانین وروابطی که در سیستم اعداد وجود دارد ، معنا پیدا میکند .

مطرح میگردید، دیگر نه تنها لازم بود که مقدار اشیاءِ قید شود و دربارهٔ تعداد آنها تبادل افکار بعمل آید (که خود این مطلب هم ایجاب میکرد که مفهوم عدد و اسامی اعداد شکل بگیرد) بلکه اینهم لازم بود که مجموعه‌های کاملا بزرگ هم شماره شود (خواه چارپایان یك گله باشند یااشیائی که مبادله میشود و یاتعداد روزها تاموعد مقرر وغیره)، نتایج‌شمارثبت وبدیگران منتقل گردد. چنین شماری‌دیگراحتیاج بنامگذاری کامل وسپس علامتگذاری برای اعداد داشت.

انتخاب علامت‌برای اعداد، که ظاهراً درهمان زمان بوجود آمدن کتابت صورت گرفته، درتکامل علم حساب نقش بزرگی بازی کرده است. علاوه برآن، این عمل نخستین قدمی است که بسمت قوانین وفرمولهای کلی ریاضی برداشته شده است. قدم بعدی یعنی کشف قوانین عملیات حساب وانتخاب حرف برای‌مجهول (X) خیلی دیرتر برداشته شد.

مفهوم عدد را مثل هرمفهوم انتزاعی دیگر نه میتوان مجسم کرد و نه میتوان نمایش داد، بلکه میتوان دربارهٔآن فکر کرد. اما فکرتنها بوسیلهٔ زبان شکل‌میگیرد ومجسم میشود وبنابراین بدون اسم، مفهوم هم وجود ندارد. علامت هم عبارت ازهمین نامگذاری است، منتهی این اسم گذاری کتبی است ومیتواند در ذهن بشکل‌محسوسی مجسم‌شود. مثلاوقتی که من‌میگویم«هفت» شما چه‌چیزی رامجسم میکنید؟باحتمال‌قوی شما هفت شیئی بخصوص را بنظرنخواهیدآورد، بلکه قبل از همه رقم «۷» را پیش‌خود مجسم خواهید کرد. این رقم «۷» درعین حال بعنوان تظاهر مادی عدد مجرد «هفت» هم بکارمیرود وواضح است که تلفظ کردن عددی‌مانند۱۸۲۷۳مشکل‌تر از نوشتن‌آنست واصلا نمیتوان آنرا با دقت‌کامل و بصورت مجموعه اشیاءِ پیش خود مجسم نمود. باین ترتیب علامات توانستند مفهوم اعدادی راکه‌نه از مشاهده ساده بدست آمده‌اند ونه از شمار مستقیم، بتدریج بوجود آورند. این مطلب مربوط‌بضروریات‌عملی بود: باظهور دولت لازم بود که مالیات جمع‌آوری شود، قشون جمع‌آوری شود، و احتیاجات آن تأمین‌گردد ومانند اینها وهمه اینها احتیاج بعمل بااعداد خیلی بزرگ داشت.

بنا بر این اولا نقش علامتها در اینست که تجسم ساده‌ای از مفهوم عدد مجرد میدهد[1]. نقش علامات ریاضی بطور کلی چنین است: آنها مفاهیم انتزاعی ریاضی را

۱ - تذکراین‌مطلب لازم است که فراگرفتن مفهوم عدد که در جریان یك دورهٔ طولانی وبا این زحمت بوجود آمد برای بچه‌های امروزی نسبتاً ساده است. چرا؟ البته اولا باین علت که بچه میشنود ومی‌بیند که چگونه بزرگترها دائماً ازاعداد استفاده میکنند وباوهم این مطلب رایاد میدهند وثانیا باین علت که (وتکیه ماهم‌روی همین علت است) بچه کلمات وعلامات آماده برای اعداد دارد، او ابتدا شکل ظاهری اعداد را یاد میگیرد وسپس بمفهوم آنها مسلط میشود.

مجسم میکنند ، مثلا $+$ بمعنی جمع، X بمعنی عدد مجهول ، a بمعنی عدد مفروض دلخواه‌است وغیره، ثانیاً علامتها امکان میدهد که عملیات مربوط باعداد خیلی‌بسادگی انجام گیرد ، هر کسی میداند که «محاسبه روی‌کاغذ» چقدر سهل‌تر از «محاسبه ذهنی» است . علامتها و فرمولهای ریاضی هم بطور کلی همین اهمیت را دارند آنها بما امکان میدهند که بجای قسمتی از استدلال ، فرمول ریاضی آنرا قرار دهیم و اعمال را تقریباً بطور مکانیکی انجام دهیم. فرمولی که نوشته شودتا حدود معینی سندیت پیدا میکند، در آن همه چیز دیده میشود ، همه چیز را میتوان آزمایش کرد ، همه چیز بوسیلهٔ قواعد دقیقی معین میشود. بعنوان مثال میتوان جمع «ستونی» ویاهرعمل جبری‌را مثل «انتقال بطرف دیگر معادله باتغییر علامت» بخاطرآورد .

از آنچه گفته شد روشن میشود که حساب بدون علامتهای مناسب برای‌اعداد ، نمیتوانست پیش برود و ریاضیات بعدی بدون علامتها وفرمولهای مخصوص ، اصولا غیر ممکن بود .

بخودی خودروشن است که مردم، روش ثبت اعداد را بطریقی که امروزه معمول وتااین حد هم مناسب است نتوانستند دفعتاً تهیه به بینند . از دوره‌های باستانی همراه باپیدایش تمدن ، علامتهای مختلفی هم‌برای اعداد بین ملل مختلف بوجود میآمد ولی نه تنها ازنظر نوع علامت ، بلکه حتی ازنظراصول نوشتن هم بآنچه که امروز معمول است، ومثلااستفاده از دستگاه دهدهی، کم شباهت داشت (مثلا بابلیهای قدیم مخلوطی از دستگاه دهدهی ودستگاه بامبنای۶۰را بکار میبردند) . درجدول ضمیمهٔ (صفحه۲۴) بعضی از علامتهای اعداد مربوط بملل مختلف را بعنوان نمونه نشان داده‌ایم وبخصوص دیده میشود که یونانیهای قدیم وسپس روسها علامتهای الفبائی را بکار میبردند ، ارقام «عربی» معاصر وبطور کلی روش یادداشت‌اعداد ازهندوستان سرچشمه میگیرد ، ازآنجا بوسیلهٔ اعراب درقرن دهم باروپا آورده شد و در اروپا طی چندین قرن قوام گرفت .

اولین خصوصیت این دستگاه اینست که دهدهی‌است ، ولی این خصوصیت‌اساسی نیست زیرا مثلا اگر علامتهای خاصی برای ده و یازده انتخاب کنیم میتوانیم دستگاه عدد شماری برمبنای۱۲ را باموفقیت بکار بریم .

خصوصیت مهم این دستگاه دراین است که «موضعی» است ؛ یعنی درآن ، هر رقم‌اگردرجاهای مختلف قرارگیرد معانی مختلف خواهد داشت ، مثلا درعلامت۳۷۲ رقم ۳ معنی عدد سدها (سدگان) و۷معنی عدد ده‌ها (دهگان) را میدهد. این طریقه نوشتن نه تنها کوتاه و ساده است ، بلکه محاسبات را هم فوق العاده آسان مینماید .

علامتهای رومی خیلی کمتر از این ساده‌اند : همین عدد ۳۷۲ بوسیلهٔ علامتهای رومی

	اسلاوی		چینی			یونانی	عربی	گرجی	مصری		رومی	ارقام قبیله مای
	کیریلیس	گلاگولیتیس	قدیمی	اقتصادی	علمی				هیروگلیفی	هیراتیکی		
0				○	○							𝋠
1	а҃	Ⰰ	一	〡	〡	α̅	ا	ა	𓏺	[illegible]	I	𝋡
2	в҃	Ⰱ	二	〢	〢	β̅	ب	ბ	𓏻	[illegible]	II	𝋢
3	г҃	Ⰲ	三	〣	〣	γ̅	ج	გ	𓏼	[illegible]	III	𝋣
4	д҃	Ⰳ	四	〤	〣〡	δ̅	د	დ	𓏽	[illegible]	IV	𝋤
5	є҃	Ⰴ	五	〥	〣〢	ε̅	ه	ე	𓏾	[illegible]	V	𝋥
6	ѕ҃	Ⰵ	六	〦	𝍥	ϛ̅	و	ვ	𓏿	[illegible]	VI	𝋦
7	з҃	Ⰶ	七	〧	𝍦	ζ̅	ز	ზ	𓐀	[illegible]	VII	𝋧
8	и҃	Ⰷ	八	〨	𝍧	η̅	ح	ჱ	𓐁	[illegible]	VIII	𝋨
9	ѳ҃	Ⰸ	九	〩	𝍨	θ̅	ط	თ	𓐂	[illegible]	IX	𝋩
10	і҃	Ⰹ	十	十	|○	ι̅	ی	ი	𓎆	[illegible]	X	𝋪
20	к҃	Ⰺ	二十	〢十	||○	κ̅	ک	კ	𓎇	[illegible]	XX	
30	л҃	Ⰻ	三十	〣十	|||○	λ̅	ل	ლ	𓎈	[illegible]	XXX	
100	р҃	Ⱃ	百	百	|○○	ρ̅	ق	რ	𓍢	[illegible]	C	
1000	҂а	Ⱍ	千	千	|○○○	͵α	غ	ჩ	𓆼	[illegible]	M	

علامتگذاری اعداد نزد ملل مختلف

نقل ازمقاله ای.گ. باشماکوی و آ.پ. پوشکویچ «منشاء سیستم شمار»

(«انسیکلوپدی ریاضات مقدماتی» جلد I چاپ مسکو ۱۹۵۱)

چنین نوشته میشود : CCCLXXII وضرب اعداد بزرگ در اینحالت یعنی وقتیکه به وسیلهٔ علامتهای رومی نوشته شده باشند خیلی مشکل میشود .

ثبت موضعی اعداد ایجاب میکند که برای مرتبهٔ خالی و بدون رقم هم علامتی گذاشته شود زیرا اگر چنین علامتی نباشد فی‌المثل سیصد و یك با سی و یك اشتباه میشود . بجای مرتبه بدون رقم ، صفر میگذاریم وباین ترتیب ۳۰۱ را از ۳۱ تشخیص میدهیم . درخطوط میخی بابلیهای اخیر هم صفر بصورت نطقه‌ای وابتدائی وجود داشته است ولی هندیها بودند که صفر را بطور منظم وارد عدد شماری کردند[1] و همین مطلب آنها را بسمت تکامل دستگاه «موضعی» ثبت اعداد ، بنحوی که ما امروز بکار می‌بریم ، راهنمائی کرد .

اما هنوز مطلب تمام نیست : صفر در دستگاه اعداد، خودش عددی‌است . البته صفر فی‌نفسه هیچ است (درزبان‌سانسکریت، هند قدیم ، هم صفر را «سونگا Çünga» یعنی «خالی-تهی» مینامیدند) ولی‌درارتباط باسایر اعداد دارای محتوی میشود وخاصیت معینی کسب میکند : اگرچه هرعدد باضافه صفرمساوی باخودش میشود ولی ضرب‌هر عدد درصفر مساوی صفر است .

۴ ـ به حساب دوران باستان بر گردیم . قدیمی‌ترین متون ریاضی که از بابل ومصر بما رسیده است مربوط بدو هزارسال قبل از میلاد است ، این متون و متونی که مربوط بدوره‌های جدیدتر هستند شامل مسائل مختلف حساب وحل آنها است و حتی مسائلی که امروزه مربوط بجبر میباشد ، مانند حل بعضی از معادلات درجه دوم وحتی درجه سوم ، درآنها دیده میشود (البته همه اینها دربارهٔ مسائل عملی وامثله مربوط به شمار هستند) ، همچنین از بابلیها جداول مجذورات ومکعبات ومعکوسات اعداد هم‌بما رسیده است. میتوان حدس زد که بابلیها علائق‌صرفاً ریاضی که باین ویاآن مسئله‌عملی مربوط نباشد ، داشته‌اند

بهرحال دربابل ومصر قدیم ، علم حساب خوب پیش رفته بود . اما این ، هنوز تئوری ریاضی اعداد نبود ، بلکه مجموعه‌ای بودازقوانین محاسبه وحل مسائل مختلف. در مدارس ابتدائی امروزه هم علم حساب را ، بهمین طریق یاد میگیرند و آنهائی هم که بطور اختصاصی باریاضیات سروکار دارند آنرا همینطور فی‌فهمند ، و این وضع هم

---

۱ - اولین کتیبه هندی که درآن صفر وجود دارد مربوط باواخر قرن نهم است ودرآن عدد ۲۷۰ تقریباً بهمین شکل که ماامروز مینویسیم نوشته شده است. ولی احتمال میرود که‌صفر قبل ازآن واز قرن ششم درهندوستان رایج بوده است .

کاملا طبیعی است و لی در اینصورت علم حساب هنوز تئوری ریاضی نیست : در حساب قضایای عمومی دربارهٔ اعداد وجود ندارد .

انتقال بحساب تئوریك بتدریج انجام گرفت .

همانطور که گفتیم ، علامات بما امکان میدهد که باچنان اعداد بزرگی سروکار داشته باشیم که چه ازراه مجموعهٔ اشیاءِ وچه ازراه شمارش متوالی ، نمیتوان بآنها رسید اگردربین قبایل وحشی شمارش عدد به ۳ ، ۱۰ ، ۱۰۰ وغیره پایان می پذیرفت وبرای بعد ازآن از کلمهٔ مبهم «بسیار» استفاده میکردند، علامات به چینی‌ها، بابلیها ومصریها امکان داد که از ده‌ها هزار وحتی میلیونها هم تجاوز کنند، اینجا حتی امکان ادامهٔ بی پایان سلسلهٔ اعداد هم مطرح میشود ؛ آگاهی روشن دراین باره کی بوجود آمده ، ما نمیدانیم ! ولی همینقدر میشود گفت که ناگهانی نبوده است ، ارشیمدس (۲۸۷-۲۱۲ قبل ازمیلاد) دراثرمشهورخودش « دربارهٔ شماره شن‌ها » راهی برای نامیدن عددی می دهد که از تعداد شن‌هائی که میتواند در « کرهٔ یك ستاره ثابت» جابگیردبزرگتر باشد، بااین ترتیب امکان نامیدن وثبت چنین عددی حتی درزمان اقلیدس مستلزم توضیح مفصل بوده است .

یونانیها درقرن سوم قبل ازمیلاد ازدومطلب مهم آگاهی روشنی داشتند : اولاسلسله اعداد میتواند تابی‌نهایت ادامه یابد وثانیاً نه‌تنها میتوان روی اعداد مفروض دلخواه عمل کرد، بلکه بافرموله کردن واثبات قضایای کلی درباره‌اعداد، میتوان دربارهٔ عددبطور کلی بحث کرد واین‌ازراه تعمیم تجارب زیادی که قبلاضمن‌عمل بااعدادمشخص انجام داده‌اند ، صورت گرفته است وبخصوص ازاین تجارب بود که قوانین و برداشتهای کلی بوجودآمد که امکان میداد در بارهٔ اعداد قضاوتهای **کلی** بشود وبااین ترتیب‌انتقال بدرجهٔ بالاتری‌ازانتزاع صورت گرفت : انتقال ازاعداد مفروض جداگانه (وانتزاعی) به عدد بطور کلی ، **به عدد ممکنه دلخواه**

بااضافه کردن واحد بعدد قبلی ، ازجریان شمار تك تك اشیاء ، به‌تصورنامحدود بودن جریان‌تشکیل اعداد میرسیم . سلسله اعداد را بصورت یك‌امتدادنامحدود میتوان بتصورآورد وبااین ترتیب همراه این تصور، مفهوم بینهایت در ریاضیات وارد شد ، البته ماعملا نمیتوانیم از طریق اضافه کردن واحد ، بعددی که باندازه دلخواه بزرگ باشد برسیم : چه کسی میتواند تا میلیون میلیون بشمارد در حالیکه تعداد ثانیه‌های یکسال ۴۰ مرتبه‌ازاین‌عدد کوچکتراست؟ اما اصل مطلب دراین نیست ؛ جریان رویهم گذاشتن واحدها، جریان‌تشکیل مجموعهٔ اشیائی که باندازهٔ دلخواه بزرگ باشد ، ازنظراصولی محدود نیست ، وبنابراین **امکان بالقوه** ادامه نامحدود سلسله اعداد وجود دارد .

محدود بودن عملی شمار دراینجا نقشی ندارد و درحقیقت انسان میکوشد تاخودراازآن منتزع نماید. قضایای کلی اعداد هم مربوط بهمین‌سلسله اعدادی‌است که بطور نامحدود ادامه مییابد.

قضایای عمومی که خاصیت عدد دلخواه را بیان میکنند در عین‌حامل‌شامل بیان خاصیت تعداد بیشماری از اعداد مختلف‌اند وازلحاظ کیفی، ازتوضیحاتی که مربوط به اعداد بخصوصی هستند، غنی‌ترند ولو اینکه خاصیت مربوط بیك عدد بخصوص را در مورد هرعدد دیگری هم‌آزمایش کنند، بنابراین الزاماً باید قضایای عمومی‌را ازطریق استدلالهای کلی که برمبنای خود قانون تشکیل سلسله اعداد متکی هستند، اثبات کرد در اینجا یك خصوصیت مهم ریاضی مطرح میشود، موضوع ریاضی نه تنها روابط کمی مفروض است، بلکه هر رابطهٔ کمی ممکن (وبنابراین بی‌نهایت‌هم) جزوموضوع ریاضی قرار میگیرد.

در«مقدمات» مشهور اقلیدس که در قرن سوم قبل ازمیلاد نوشته شده، قضایای عمومی درباره اعداد صحیح وجود دارد؛ بخصوص باین قضیه برمیخوریم که سلسله اعداد اول بی‌پایان است وعدد اول بهراندازه بزرگ که بخواهیم وجود دارد.

باین‌ترتیب‌علم حساب به تئوری‌اعداد تبدیل میشود، همچنین‌علم حساب‌ازمسائل خاص و مشخص جدا شده وبرشته‌ای‌ازمفاهیم وقضاوتهای انتزاعی تبدیل می‌شود؛ حساب قسمتی ازریاضیات «خالص» میشود، درحقیقت این همان لحظه‌ای است که خودریاضیات خالص باهمهٔ خصوصیاتش (که قبلا دربارهٔ آن صحبت کردیم) قدم بعرصهٔ وجود نهاد. البته تذکراین مطلب لازم است که ریاضیات خالص در عین حال هم از حساب و هم از هندسه بوجودآمد، علاوه براین در قوانین کلی حساب دیگرنطفه‌های جبروجود داشت که بعد ها ازحساب جدا شد، ومادراین‌باره بعداً صحبت خواهیم کرد.

حالا وقت‌آنست که همهٔ نتایج را جمع بندی کنیم، زیرا جریان بوجودآمدن حساب تئوریك را اگرچه سطحی‌هم بود، ازهمان وقتی که نطفه مفهوم عدد بوجودآمد بررسی کردیم.

۵ ـ ازآنجا که تولد حساب تئوریك قسمتی ازتولد ریاضیات بود، طبعاًمیتوانیم انتظار داشته باشیم نتایجی که در بارهٔ حساب بدست آوردیم بتواند بسؤالات عمومی که بطورکلی دربارهٔ ریاضیات مطرح کردیم، جواب بدهد. این سؤالات را باتوجه بحساب بخاطر بیاوریم:

۱ـ بخاطربیاوریم که عدد اول بعدد مثبت صحیح باستثنای واحد گویند که‌تنها برخودش وبرواحد قابل قسمت باشد.

اولا مفاهیم انتزاعی حساب چگونه بوجود میآید و درواقع چه چیزی رامنعکس میکند ؟

آنچه که دربارهٔ نطفه‌بندی حساب ذکر کردیم باین سئوال جواب میدهد: مفهوم حساب روابط کمی مجموعه‌های اشیاء را منعکس میکند، این مفاهیم از طریق انتزاع وبرپایه تجزیه وتحلیل وتعمیم تجارب عملی فراوان بوجود آمده‌است ، ضمناً بوجود آمدن این مفاهیم هم تدریجی بوده است ، ابتدا عدد باتوجه باشیاء مشخص وسپس عدد مجرد وبالاخره مفهوم عدد بطور کلی یعنی **عدد دلخواه ممکن** ، بوجود آمد و هریك ازاین درجات‌هم درنتیجه جمع‌شدن تجارب وبکار بردن مفاهیم قبلی پدید آمده‌است. (ضمناً یکی از قوانین اساسی تشکیل مفاهیم ریاضی نیز چنین است : مفاهیم ریاضی از طریق یك رشته متوالی انتزاع وتعمیم بوجود میآید ، درحالیکه هر انتزاع و تعمیم برتجربه‌ای که ازبکار بردن مفاهیم انتزاعی قبلی جمع آوری شده است متکی‌میباشد)

تاریخ بوجود آمدن مفاهیم حساب نادرست بودن این نظریات راکه گویا این مفاهیم از «تفکر خالص» ، از «مکاشفه قبلی» ، از «بررسی حضوری» و خیلی چیزهای دیگر از این قبیل ریشه گرفته‌است ثابت میکند .

ثانیا ـ چرا نتایج حساب تااین اندازه متقاعد کننده وغیرقابل رد هستند ؟

تاریخ‌باین‌سئوال‌ماهم جواب‌میدهد : می‌بینیم که نتیجه گیریهای حساب‌بکندی وبتدریج بدست آمده‌است، آنها منعکس کننده تجاربی‌هستند که درطول نسلهای متوالی انجام گرفته است و ازاین طریق در ذهن تثبیت شده است . آنها بوسیلهٔ اسماء اعداد، بوسیلهٔ اعمال یکنواختی که دائماً تکرارمیشد وبوسیلهٔ بکار بردن عملی و دائمی آنها در زبان تثبیت میشد وباین ترتیب وضوح وخاصیت متقاعد کننده‌شان را کسب میکرد. ریشه‌وسرچشمه‌خود روشهائی‌هم که‌درمورد استدلالهای منطقی‌بکارمیرود درهمین‌جاست. ضمناً باید گفت که مسئلهٔ اساسی تنها در تکراری بودن مطالب نیست ، بلکه دراین‌هم هست که روابطواقعیات‌واقعاً هم وضوح و ثباتی‌دارند وهمین روابط واقعیات است که در مفاهیم اساسی حساب ودر قوانین نتیجه گیریهای منطقی آن منعکس شده است .

خاصیت متقاعد کننده علم حساب دراینست که نتیجه گیریهای آن بطورمنطقی از مفاهیم اساسیش بیرون کشیده شده است و این هر دو ـ یعنی استدلالهای منطق و مفاهیم حساب ـ براساس هزاران عمل وبراساس قوانین عینی که دنیای مارا دربر گرفته است بوجود آمده ودر ذهن تثبیت شده است .

ثالثاً ـ چرا حساب باهمه انتزاعی بودن مفاهیمش تااین اندازه مورد مصرف‌پیدا میکند ؟

جواب ساده است ، مفاهیم ونتیجه گیریهای علم حساب ، که از تعمیم تجارب فراوان بدست آمده ، چنان روابطی از واقعیت‌را بطور انتزاعی بیان میکند که دائماً ودر همه جا باآنها برخورد میکنیم مانند شمردن اشیاءِ اطاق ، ستاره‌ها ، مردم ، اتمها و... حساب بعضی از خواص کلی را انتخاب میکند وآنها را ازهمه خواص مشخصی که خاص هرشیئی است جدا مینماید وبخصوص بمناسبت همین انتخاب عمومی‌ترین خواص است که نتیجه گیریهای حساب در موارد خیلی زیاد مورد استفاده پیدا میکند . باین ترتیب انتزاعی بودن حساب امکان کاربرد وسیع آنرا تأمین میکند (ضمناً این مطلب مهم است که این انتزاعی بودن توخالی وپوچ نیست واز تجارب طولانی عمل استخراج‌شده است) . همین مطلب دربارهٔ همه ریاضیات ودربارهٔ هرمفهوم یاتئوری انتزاعی صحیح‌است. امکان کاربردتئوری باین‌مطلب مربوط است که مواد اولیه‌ای که این تئوری از آنهاساخته شده است تاچه اندازه درآن تعمیم یافته است .

در عین حال هرمفهوم انتزاعی ، و بخصوص مفهوم عدد ، بعلت همین انتزاعی بودنش دارای معنای محدودی میشود : اولا وقتی که در مورد شیئی مفروض ومشخصی بکار میرود تنها یکی از جنبه‌های آن منعکس میشود وبنابراین تصور ناقصی ازآن‌در مقابل ماظاهر میشود. مثلا ، مفروضات‌عددی غالباً خیلی کم درباره ماهیت عمل صحبت میکند . ثانیاً مفاهیم انتزاعی را همه جا نمیتوان بکاربرد ، مگر اینکه شرایط‌معینی وجود داشته باشد؛ نمیتوان حساب‌را درمورد مسئله‌ای بکار برد مگراینکه متقاعدشویم که‌این مورداستفاده دارای مفهومی است. مثلا وقتی که ما دربارهٔ جمع صحبت میکنیم اشیاءِ را در ذهنمان رویهم میریزیم والبته با این عمل هیچگونه تغییری در وضع خود اشیاء حاصل نمیشود . اما اگر جمع را در مورد رویهم ریختن عملی اشیاء بکار ببریم ، یعنی اگراشیاءِ راعملا ومثلا بشکل‌توده‌ای رویهم بریزیم ویاروی میز قرار دهیم دیگر یك جمع ساده‌انتزاعی‌انجام نمیگیرد، بلکه واقعاً جریانی صورت میپذیرد واین‌جریان نه تنها نتیجه‌ای از جمع ساده حساب نیست ، بلکه اصولا ممکن است عمل جمع بی معنی باشد ، مثلا اشیائی که بصورت توده رویهم ریخته میشوند ممکن است بشکنند ، حیواناتی که باهم زندگی میکنند ممکن است یکدیگر را پاره کنند ، چیزهائی که «رویهم ریخته‌شده‌است» ممکن‌است وارد در فعل وانفعالات شیمیائی شوند ؛ مخلوط یك لیتر آب ویك لیتر الکل بعلت انحلال متقابل این دو مایع ، بجای ۲ لیتر ۱/۹ لیتر خواهد شد وغیره .

آیا امثلهٔ دیگری هم لازم است ؟ هرقدر که لازم باشد میتوان از این نمونه ها ذکر کرد ؟

خلاصه ، واقعیت، محسوس ومتحقق Concret است ودرك این مسئله بخصوص درمورد روابط ریاضی ، بعلت انتزاعی بودنشان مهم است .

رابعاً ـ بالاخره آخرین سئوالی که ماطرح کردیم مربوط به نیرو های محرکه پیشرفت ریاضیات بود .

درمورد حساب ، جواب باین سئوال‌هم ازتاریخچهٔ بوجودآمدنش روشن میشود. می‌بینیم که‌مردم درعمل بشمار مسلط شدند ومفهوم عدد را بوجود آوردند ؛ سپس عمل Pratique ، هم لزوم علامات را برای اعداد و هم مسائل مشکل‌تـر را مطرح نمود . خلاصه پراتیك اجتماعی بعنوان نیروی محرکه‌ای ، پیشرفت و تکامل حساب را تأمین مینمود . دراین‌جریان تکاملی ، پراتیك با تفکر انتزاعی که تجارب پراتیك را تعمیم میداد در تأثیر متقابل دائمی بود . مفاهیم انتزاعی کـه بـرمبنای پراتیك بوجود میآید بسلاح نیرومند پراتیك تبدیل میشود ودرعـین حال در جریان استفاده عملی ، تکمیل میشود . انتزاع ازمسائل غیراساسی ، به‌کشف حقیقت‌امر کمك میکند ودرمواردی که خواص‌و ارتباطات‌عمومی منتزع شده ، نقش‌تعیین کننده را بازی میکند ؛ رسیدن‌براه کلی را تأمین مینماید .

علاوه برآن گاهی تفکر بیش ازمیزانی که مستقیماً مورد احتیاج مسائل عملی است جلو میرود ، مثلا مفهوم اعداد بزرگی مانند میلیون و میلیارد برمبنای شمار و قبل از آنکه مورد استفاده عملی اینگونه اعداد مطرح شود ، بوجودآمد . ازاینگونه امثله در تاریخ علوم کم نیست ؛ کافی است که اعداد موهومی را ـ که قبلا هم متذکر شده‌ایم ـ بخاطر بیاوریم . اینها همه فقط حالت خاصی از شناختن رابطه متقابل عمل‌و تفکر انتزاعی ، عمل وتئوری را نشان میدهد .

۳

هندسه

۱ ـ تاریخ تکوین هندسه در اساس شبیه به‌تاریخ تکوین‌حساب است . نخستین مفاهیم واطلاعات هندسی در دوره‌های قبل ازتاریخ ودرجریان فعالیت‌عملی بشر بوجود آمده است .

بشر ، اشکال‌هندسی‌را ازخود طبیعت گرفته‌است؛ گردی وداس‌مانندی‌ماه،صافی ومستوی‌بودن‌دریاچه ، مستقیم بودن‌شعاع‌نور و کشیده بودن درخت از مدتها قبل ازبشر وجودداشته‌ودائماً درمقابل‌او بوده‌است. البته درخودطبیعت باخطوطی که‌کاملاراست‌باشند ویابامثلثها ومربعها بندرت برخوردمی‌کنیم . بشر تصوردربارهٔ این‌اشکال‌را بخصوص باین علت بدست‌آورد که طبیعت‌راضمن فعالیت عملی درك‌میکرد وبخاطراحتیاجاتی که‌داشت اشیائی تهیه میکرد که بتدریج شکل‌منظم‌تری بخود میگرفتند . مردم برای خودخانه میساختند ، سنگها را تراش میدادند، قطعات‌زمین را محصور میکردند ، روی کمان‌ـ های خود زه میکشیدند ، ظروف گلی میساختند وآنرا تکمیل میکردند وضمن اینکار باین مفهوم میرسیدند که ظرف **گرد** از آب در میآید و یا زهی که کشیده شده باشد **مستقیم** است و غیره ، خلاصه ابتدا شکل را بمواد اولیه دادند و سپس آنرا بعنوان چیزی که بماده داده میشود ومیتواند بخودی‌خود وجدا از ماده مورد بررسی قرار گیرد درك کردند . بشر ضمن درك شکل میتوانست مصنوعات خود را تکمیل کند و از آنجا با وضوح بیشتری خود مفهوم شکل را تشخیص دهد . باین‌ترتیب مبنای بوجود آمدن مفاهیم انتزاعی هندسه را فعالیت عملی بشر تشکیل میدهد . میبایست هزاران شیئی‌با کناره های مستقیم ساخته شود ، هزاران نخ کشیده شود ، تعداد زیادی خطوط مستقیم روی زمین رسم شود تاتصور روشنی دربارهٔ خط مستقیم ، بمفهوم کلی آن بدست آید : چنان مفهوم کلی که بتواند درهمهٔ این حالات خاص صادق باشد ؛ حالا مابوسیله‌اشیائی

که بدست بشر ساخته شده و کناره‌های مستقیم دارند احاطه شده‌ایم ، خودمان هم یاد گرفته‌ایم که خط مستقیم رارسم کنیم وتنها بهمین علت است که از کودکی دارای تصور روشنی دربارهٔ خط مستقیم هستیم .

بهمین ترتیب مفهوم مقادیر هندسی طول ، سطح وحجم ازفعالیت‌عملی بوجود آمد : مردم بخاطر احتیاجاتشان طولهارا اندازه میگرفتند، مسافات را معین میکردند و مساحات واحجام را با چشم تخمین میزدند . بتدریج ساده‌ترین قوانین کلی و نخستین روابط هندسی کشف شد ، مثلا سطح مستطیل برابر است با حاصلضرب دو ضلع آن ، دانستن اینگونه روابط برای کشاورزان‌مفید بود تابتوانند سطح کشت ودرنتیجه محصول احتمالی راتخمین بزنند .

باین ترتیب هندسه از فعالیت‌عملی وازمسائل زندگی نطفه گرفت وبوجودآمد. اودموس Eudemos رودسی دانشمندیونان قدیم‌درقرن چهارم قبل ازمیلاد نوشته‌است: «هندسه‌بوسیلهٔ مصریها کشف شد وضمن‌اندازه گیری زمین‌بوجودآمده این‌اندازه گیری بعلت‌طغیان رودخانه‌نیل که دائماً مرزها [1] را می‌شست لازم‌بود . هیچ چیز تعجب‌آوری در این مطلب‌نیست که‌این علم هم مانند سایر علوم ، از احتیاجات بشری بوجود آمده باشد. هردانشی که‌بوجود میآید ازحالات ناقص بطرف‌حالت‌کامل‌میرود ، نطفه این دانش از طریق درك احساسی بوجود میآید و بتدریج بموضوع مورد بررسی ماتبدیل میشود و سپس درآخرکاربمطلبی که میتواند درذهن مجسم شود مبدل میگردد . »

البته اندازه گیری زمین تنها محرك مردمان قدیم برای بوجود آوردن هندسه نبوده است . دربارهٔ مشخصات مسائلی کـه برای مصریها و بابلیهای قدیم مطرح بـود و چگونگی حل این مسائل ، میتوان ازروی متونی که تاکنون کشف شده قضاوت کرد. یکی ازقدیمی‌ترین متون مصری که بمارسیده است مربوط به بیش از ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد است . این متن راهنمائی برای «منشی‌ها» (مباشران‌درباری) است و بوسیله احمس Ahmose نامی نوشته شده است . در آنجا یك سلسله مسائل مربوط بمحاسبهٔ ظرفیت ظروف و انبارها ، سطح قطعات زمین ، اندازه گیری امور بزمین و غیره جمع آوری شده است .

مصریها وبابلیها میتوانستند اندازه مساحات واحجام ساده را معین کنند ، نسبت محیط و قطر دایره را بادقت نسبتاً خوبی میدانستند و باحتمالی حتی میتوانستند سطح

---

۱ ـ صحبت بر سر حدود قطعات زمین است ، ضمناً متذکر میشویم که کلمهٔ (Géometrie) (= هندسه) بمعنی‌اندازه گیری‌زمین‌است «درزبان‌یونان‌قدیم (gê) بمعنی زمین و (metron) بمعنی اندازه گیری است » .

کره را بدست آورند ، بطـور خلاصه آنها مجموعه زیادی اطلاعات هندسی در اختیار داشتند ، ولی تاآنجاکه میتوان قضاوت کرد هندسه آنها هنوز بعنوان یك علم تئوریك که شامل قضایا و استدلالهای مربوط بآن قضایا باشد ، نبود ، هندسه این دوره هم مانند حساب ، عبارت از مجموعه قوانینی بود که از تجربه بدست‌آمده بود . علاوه براین ، هندسه بطور کلی ازعلم حساب جدا نبود : مسائل هندسه ازنظر محاسبه ، در عین‌حال مسائل حساب هم بودند .

در قرن هفتم قبل از میلاد ، هندسه ازمصر بیونان نفوذ کرد و در آنجا بوسیلهٔ فلاسفه بزرگ ماتریالیست یعنی طالس Thalès ودموکریت Démocrite و دیگران تکامل‌بیشتری پیدا کرد، پیروان فیثاغورث Pythagore پایه‌گذارمکتب ایده‌آلیستی فلسفی ـ مذهبی ـ هم ودیعهٔ گرانبهائی در هندسه باقی گذاشتند .

پیشرفت‌هندسه‌دراین‌جهت‌انجام‌می گرفت که مطالب‌جدیدی جمع‌آوری وارتباط آنها بایکدیگر روشن شود . بتدریج این ارتباطات تبدیل به استنتاج منطقی بعضی از مطالب هندسی از بعضی دیگر شد وازاین طریق اولاخودمفهوم قضیه‌هندسی واستدلال آن بوجود آمد و ثانیاً احکامی که میتوان سایرمطالب را ازآنها نتیجه گرفت، یعنی اصول موضوعه Les axiomes را ، روشن نمود .

باین ترتیب هندسه بتدریج تبدیل به تئوری ریاضی شد .

مطالب منظم هندسه در قرن پنجم قبل از میلاد وجود داشته است ولی ظاهراً باین علت کـه کتاب «مقدمات» اقلیدس (Euclide ـ قرن سوم قبل ازمیلاد) جانشین همه آنها شد ، چیزی ازآنها بمانرسیده است . دراثر اقلیدس ، هندسه باچنان سیستم دقیقی ارائه شده‌است که تازمان لباچوسکی (Lobatschefsky) یعنی‌درجریان بیش از دوهزار سال ، هیچ چیز اساسی جدیدی نتوانست باصول آن اضافه شود . کتاب درسی مشهور کیسلف (Kisseléev) همچون همه کتابهای درسی مشابهش در همهٔ دنیا ، در چاپهای‌قدیمی چیزی‌جزآنچه‌اقلیدس گفته‌بود، منتهی قابل‌فهم‌تر، ارائه‌نمیداد . بزحمت میتوان کتابی بدوام «مقدمات اقلیدس» پیدا کرد واین‌نشانه‌ای از قدرت آفرینش نبوغ یونانی است . البته ریاضیات بجلو میرفت ودرك ما ازاصول هندسی عمیق ترمیشد ولی باوجود این «مقدمات» اقلیدس بازهم از بسیاری جهات بعنوان کتاب نمونه‌ای ریاضیات خالص تلقی میشد . در«مقدمات» کلیه پیشرفتهای قبلی جمع بندی شده است، اقلیدس ریاضیات زمان خودش را بعنوان یك علم نظری (تئوریك Théorique) مستقل‌یعنی همان چیزی که امروز هم ازآن فهمیده میشود ، تلقی میکرد .

۳ ـ همان‌نتایجی‌را که ازتاریخ حساب بدست‌آوردیم، ازتاریخ‌هندسه‌هم میتوان

بدست آورد . می‌بینیم که هندسه هم از عمل(پراتیك ـ Pratique) ناشی شده و در یك دورهٔ خیلی طولانی بیك تئوری ریاضی تبدیل شده است .

هندسه با «اجسام» واشکال هندسی سروکاردارد وروابط کمی ووضع آنها رانسبت بهم مطالعه میکند . ولی جسم هندسی چیزی جز همان جسم حقیقی نیست که تنها ازنقطه نظر شکل [1] فضائی آن مورد بررسی قرار میگیرد ، درحقیقت کار هندسه این است که‌این «شکل» راازسایر خواص جسم ازقبیل وزن مخصوص ، رنگ ، وزن وغیره جدا کند («شکل هندسی» مفهومی‌وسیعتر وعمومی‌تر از «شکل فضائی» است ، شکل هندسی میتواند بدون امتداد فضائی باشد مثلا سطح فقط دو بعد و خط یك بعد دارد و نقطه دارای بعدی نیست . نقطه مفهوم انتزاعی انتهای خط ، مفهوم انتزاعی مکان است واین انتزاع تاآنجاست که نقطه شامل‌هیچ جزئی نمیشود . ضمناً باید گفت که همه‌این مفاهیم را اقلیدس هم معین کرده بود) .

بنابر این موضوع هندسه عبارتست از اشکال فضائی اجسام حقیقی و روابط آنها بنحوی که این روابط از همه خواص دیگر اجسام حقیقی منتزع شده و بعبارت دیگر روابطی «بصورت‌کاملا خالص» باشد . بخصوص همین‌حد تجریداست که‌هندسه را ازسایر علومی که‌اشکال‌فضائی‌وروابط اجسام‌را مطالعه‌میکنند،ومشخص‌میکند، مثلانجوم‌روابط و وضع استقرار نسبی اجسام وبخصوص اجسام آسمانی را ، مطالعه میکند ، زمین‌شناسی Géologie شکل زمین وبلور شناسی Cristallographie شکل بلورها را مطالعه‌می کند وغیره ، درتمام این حالات شکل ووضع استقرار نسبی اجسام مشخص ، باتوجه به سایر خواص آنها مورد مطالعه قرار میگیرد .

انتزاعی بودن هندسه مستلزم ذهنی بودن روش آنست . باخط راستی که‌پهنائی ندارد وبا«اشکال مطلق»، نمیتوان تجربه کرد وتنها این راه میماند که باکمك استدلال نتایجی را ازنتایج دیگر بدست آوریم . بنابراین یك‌قضیه هندسی بایدباکمك‌استدلال، باثبات برسد ، درغیر اینصورت متعلق بهندسه وبخصوص مربوط به«شکل‌مطلق»نخواهد بود .

وضوح مفاهیم‌اصلی هندسه، برداشت‌استدلالهاوقاطعیت‌نتیجه گیریهای‌آن دارای همان منشاء وریشه‌ای هستند که درمورد حساب گفتیم . خواص مفاهیم هندسی هم‌مثل خودآن مفاهیم، از طبیعتی که بشر را احاطه کرده‌است منتزع شده‌اند . مردم بکرات خط راست رسم کرده اند تا اینکه این مطلب را که «از هر دونقطه میتوان خط راستی

---

۱ ـ شکل جسم همیشه متضمن اندازه‌های آن هم هست .

عبور داد» بعنوان يك اصل (Axiome) قبول کرده‌اند ، میلیاردها بار اشیاء مختلف را جابجا کرده و پهلوی هم گذاشته‌اند تا اینکه باتعمیم این‌عمل درهندسه ، تصور انطباق اشکال هندسی‌را بوجودآورده وسپس، این‌تصوررا برای اثبات قضایا بکار برده‌اند (آنطور که دربارهٔ قضایای مشهور تساوی مثلثها بکار میرود) .

بالاخره ، یکی دیگر ازخواص هندسه، عمومی بودن آنست : حجم کره برابر است با $\frac{4}{3}\pi R^3$ و این رابطه باین مربوط نیست که کره مایك ظرف باشد یا کره‌ای که از فولاد ساخته شده ویا کره‌ای آسمانی ویاقطره‌ای آب وغیره ، ازآنجا که هرجسم واقعی ، دارای شکل ، اندازه وموقعیت کم و بیش مشخصی نسبت بسایر اجسام است ، هندسه توانست آن چیزی راکه برای همه اجسام **عمومی** است مشخص کند بهمین جهت طبیعی است که هندسه هم تقریباً بهمان وسعت حساب مورد استفاده عملی داشته باشد: کارگری که‌اجزاء را اندازه میگیرد ویانقشه‌ای را میخواند، توپچی که فاصلهٔ‌خود تاهدف رامعین میکند، دهقانی که مساحت‌زمین زیر کشت را اندازه میگیرد، معماری که حجم‌کارهای‌ساختمانی راتخمین میزند، همه اینها ازمقدمات‌هندسه استفاده‌میکنند. راهنمای کشتی یا هواپیما ، منجم ، زمین شناس ، مهندس وفیزیك دان به نتایج دقیق هندسه احتیاج دارند .

بعنوان نمونهٔ برجسته‌ای از حل انتزاعی و هندسی مسائل مهم علوم طبیعی میتوان از بررسیهای بلورشناس و هندسه‌دان مشهور فدورف (Fedorov) نام برد . مسئله یافتن همه انواع ممکنه تقارن بلورها ، که فدورف پیش روی خود طرح کرده بود ، یکی از مسائل اساسی در بلور شناسی تئوریك است . فدورف برای حل این مسئله ، تمام خواص فیزیکی بلورها را کنارگذاشت و آنها را تنها بعنوان دستگاه منظمی از اجسام هندسی (بجای دستگاه اتمهای مشخص) مورد بررسی قرار داد . بنابراین مطلب باینجا رسیدکه اشکال ممکنه تقارنی‌که دستگاه اجسام هندسی میتواند داشته باشدکدام است ؟ و این مسئلهٔ صرفاً هندسی‌را فدورف تا بآخر حل‌کرد وهمهٔ انواع تقارن را پیداکرد . مسئلهٔ ۲۳۰جواب داشت . ضمناً حل این‌مسئله ودیعهٔ بزرگی درهندسه باقی گذاشته و سرآغازی برای بسیاری از بررسیهای هندسی بشمار میرود

در این‌مثال نیز (مثل همه نمونه‌های‌مشابهش درهندسه) نیروی محرك‌اساسی هندسه بچشم میخورد و آن عبارتست از رابطه متقابل عمل و تفکر انتزاعی . از مشاهده‌بلورها مسئلهٔ تقارن‌آنها مطرح‌شد و ازآن ، بطورانتزاعی تئوری‌ریاضی‌جدیدی

بنام تئوری دستگاههای منظم و یا آنطورکه معروف است «گروههای فدورف» بوجود آمد (در فصل دهم راجع باین مطلب صحبت خواهد شد) . سپس خود این تئوری نه تنها مشاهدات مربوط به بلورهارا بطور درخشانی تأیید کرد ، بلکه بعنوان یک راهنمای کلی به پیشرفت بلورشناسی خدمت کرد و هم بررسیهای تجربی و هم بررسیهای صرفاً ریاضی جدیدی بوجود آورد .

٤

حساب وهندسه

۱ ـ تااینجا حساب وهندسه‌را جدا ازیکدیگر بررسی میکردیم، ارتباط‌متقابل آنها و بطور کلی ارتباط بین تئوریهای ریاضی ازنظر ما دور بود و حال‌آنکه این ارتباط اهمیت فوق العاده‌ای دارد . تأثیر متقابل تئوریهاست که ریاضیات را بجلو سوق میدهد وغنای روابطی‌از واقعیات را که بوسیله این‌تئوریها منعکس‌شده‌است ظاهر میسازد .

حساب وهندسه نه تنها ازیکدیگراستفاده میکنند ، بلکه درعین حال سرچشمهٔ ایده‌ها ، روش‌ها وتئوریهای عمومی‌بعدی‌هم بشمار میروند . درتحلیل نهائی ، حساب و هندسه عبارت از دوریشه‌ای هستند که ریاضیات برپایه‌آنها قرار گرفته ورشد کرده‌است تأثیر متقابل این دوعلم ازهمان زمانی که نطفهٔ هریك از آنها بسته میشد وجود داشته است. همان اندازه گیری ساده طول هم ترکیبی از حساب و هندسه است . وقتی که طول شیئی را اندازه میگیریم واحدطول را روی‌آن مرتباً **جدامیکنیم** ؛ و**حساب میکنیم** که چند مرتبه میتوانیم این عمل‌را انجام دهم . عمل اول (جدا کردن‌واحد) یك عمل هندسی وعمل‌دوم (محاسبه) یك‌عمل‌مربوط بحساب‌است . هرکسی‌هم که‌طول جاده‌ای را باقدمهای خود میشمارد این دوعمل را باهم ترکیب میکنند .

بطور کلی اندازه گیری هر کمیت ، شمار را باعمل خاصی که مربوط بنوع این کمیت است ترکیب میکند ،کافی است که اندازه گیری مایعات را بوسیلهٔ پیمانه و یا اندازه گیری فاصلهٔ زمانی را بوسیلهٔ شمار نوسانات پاندول بخاطر بیاوریم .

ولی ضمن اندازه گیری کشف میشود که درحالت کلی ، واحد انتخابی ، بتعداد صحیح در کمیتی که اندازه میگیریم نمیگنجد و با شمردن ساده واحد نمیتوان کار

اندازه گیری‌را پایان داد . درآنصورت‌لازم است که واحد را تقسیم کنیم تابتوانیم کمیت را بوسیلهٔ‌تقسیمات واحددقیق‌تربیان کنیم . دراینجادیگر کمیت باعدد کسری بیان‌میشودو نه باعدد صحیح ؛ آنطور که‌ازتحلیل مدارك تاریخی وغیرآن میتوان استنباط کردواقعاً هم اعداد کسری بهمین ترتیب بوجود آمده اند : این اعداد ازتقسیم و مقایسه کمیات (یعنی ضمن اندازه گیری) بوجود آمده اند . نخستین کمیاتی که بشر اندازه میگرفت عبارت از کمیات هندسی‌بود مانند طول، سطح زراعت ، حجم مایعات واجسام دانه‌های Granulé . بنابراین دربوجود آمدن اعداد کسری ، تأثیر متقابل حساب و هندسه دیده میشود ، این تأثیرمتقابل منجر بظهور مفهوم مهم و جدید کسرها و توسعه مفهوم عدد از اعداد صحیح باعداد کسری (ویاآنطور که ریاضی دانان میگویند ، اعداد گویا یعنی اعدادی که بوسیلهٔ نسبت اعداد صحیح بیان می‌شوند) شد . اعداد کسری ازتقسیم اعداد صحیح بوجود نیامد و نمیتوانست بوجود بیاید ، زیرا با اعداد صحیح اشیاء درست را می‌شمارند : جملاتی از قبیل سه‌آدم ، سه تیر کمان وغیره همه قابل‌فهم‌است ولی دوسوم‌آدم و حتی یك سوم تیر کمان قابل فهم نیست ؛ با سه‌تا «یکسوم‌تیر کمان» نمیتوان گوزنی را کشت ، برای اینکار یك تیر**درست** لازم است .

۳ ـ درجریان‌تکامل مفهوم عدد ، که حساب و هندسه هردودرآن دخیل‌بودند ظهوراعداد کسری نخستین قدم بشمارمیرود، قدم بعدی کشف پاره خطهای گنگ(اصم) بود . یادآوری میکنیم که پاره خطها را موقعی نسبت بهم گنگ گویند که پاره خطی وجودنداشته باشد که درهردوی‌آنها بتعداد صحیحی‌بگنجد (یعنی مقیاس مشترك نداشته باشند) یابعبارت دیگر نسبت بین آنها بوسیلهٔ کسرهای معمولی ، یعنی نسبت‌بین‌اعداد صحیح ، بیان شود.

ابتدا ، مردم اصولاً باین فکر نمی‌افتادند که آیا هر طولی را میتوان با کسری بیان کرد یانه ؟ اگرضمن تقسیم یا اندازه گیری تقسیمات خیلی کوچکی پیدا میشد ، آنها را بسادگی حذف میکردند : در عمل دقیق کردن بی حد اندازه گیری بی معنا بود دموکریت Démocrite فرض کرد که اشکال هندسی از اتمها تشکیل شده اند، طبق نظردموکریت پاره خطها از یك رشته اتمها تشکیل شده اند وبنابراین نسبت‌پاره خطها عبارت است از نسبت عدهٔ اتمهائی که درآنهاست یعنی‌این نسبتها میتواندبوسیلهٔ کسر بیان شود ، این فرض ، که بنظر ما باندازه کافی عجیب وغریب‌است ، برای تعیین سطوح و احجام خیلی ثمربخش ازآب درآمد . سطح بصورت مجموع رشته‌هائی که از اتمها وحجم بصورت مجموع قشرهائی از اتمها ، در نظرگرفته میشد . از همین طریق بود که دموکریت مثلا حجم مخروط را پیدا کرد . خواننده‌ای که بامحاسبات انتگرالی

آشنا باشد بسادگی متوجه میشود که در این برداشت ، نطفه تعیین سطوح و احجام بطریق محاسبات انتگرالی وجود دارد. (علاوه‌براین وقتی که‌بطورذهنی بدورهٔ دموکریت برگردیم باید کوشش کنیم که خود را از تمام تصوراتی که امروزه در اثر تکامل ریاضی برای ماعادی ومعمولی شده است آزاد کنیم ، در زمان دموکریت هنوز اشکال هندسی باندازه امروز از اشیاء واقعی جدانبودند وبنا براین طبیعی بود که فرض مربوط باینکه اجسام واقعی متشکل از اتمها هستند ، دموکریت را باین مطلب منتقل کند که‌اشکال هندسی هم ازاتمها تشکیل شده‌اند) .

باری‌این‌فرض که پاره‌خطها ازاتمهاتشکیل‌شده‌اند با قضیه‌فیثاغورث Pythagore تناقض پیدا کرد ، زیرا نتیجه مستقیم این قضیه وجود پاره خطهائی است که نسبت بهم گنگ‌اند ، مثلا قطرمربع نسبت‌بضلع آن گنگ است یعنی نسبت‌آنها را نمیتوان‌بوسیلهٔ نسبت اعداد صحیح بیان کرد .

ثابت‌میکنیم که ضلع وقطرمربع واقعاً نسبت بهم گنگ‌اند : اگر ضلع مربعی برابر a وقطرآن‌برابر b باشدطبق قضیه‌فیثاغورث‌خواهیم‌داشت: $2a^2 = {}^2 + {}^2 = {}^2$

وبنابراین:
$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$$

ضمناً کسری وجود ندارد که مجذور آن برابر۲ باشد ومااین مطلب را ازطریق برهان خلف ثابت میکنیم ، فرض کنیم که p و q اعداد صحیحی باشند که در رابطهٔ

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

صدق کنند ، درضمن میتوانیم فرض کنیم که p و q دارای مقسوم‌علیه مشترکی نباشند (یعنی نسبت بهم اول باشند) ، زیرادرغیراینصورت میتوان کسر را ساده کرد . اماا گر $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ باشد دراینصورت $p^2 = 2q^2$ بوده وبنابراین p^2 بر۲قابل قسمت خواهد بود وازآنجا که p^2 مجذور یك عدد صحیح است باید بر٤قابل قسمت باشد . بنابراین خواهیم‌داشت : $p^2 = 4q_1^2$ وازآنجا $2q^2 = 4q_1^2$ یا $q^2 = 2q_1^2$ و ازآنجا نتیجه میشودکه q هم باید بر۲قابل قسمت باشد واین متناقض باشرایطی‌است که برای p وq کردیم وگفتیم که مقسوم علیه مشترك ندارند . این تناقض ثابت میکند که نسبت $\frac{b}{a}$ نمیتواند بوسیله‌عددی گویا (منطق) بیان‌شود یعنی قطروضلع مربع نسبت‌بهم گنگ‌اند.

این کشف تأثیرخیلی زیادی روی دانشمندان یونانی گذاشت . حالا ، وقتی که مادیگر به‌اعداد گنگ عادت کرده‌ایم وبسادگی باریشه دوم وغیره اعداد عمل میکنیم ،

وجود پاره‌خطهائی که نسبت بهم گنگ باشند مارا ناراحت نمیکنند . ولی در قرن پنجم قبل از میلاد برای دانشمندان یونانی کشف اینگونه پاره خطهاکاملا ناراحت کننده‌بود آنها مفهوم‌اعداد گنگ‌را نمیدانستند، علامتی بشکل $\sqrt{2}$ نداشتند وبنابراین‌نتیجه‌ای که بدست آمده بود برای آنها باین معنی بود که نسبت قطر و ضلع مربع را اصولا نمیتوان بوسیلهٔ هیچ عددی نشان داد .

برای یونانیها دروجود پاره خطهای گنگ رازی نهفته بود و این راز مربوط به پیوستگی بود (یکی از احکام تضاد فلسفه علمی که مربوط به‌پیوستگی وحرکت‌است). بحث دربارهٔ این تضاد ، فلاسفه مشهور یونان را بخود مشغول داشت که در بین آنها معماهای زنون Zénon ایلیائی شهرت خاصی دارد .

یونانیها تئوری نسبت پاره خطها (وبطور کلی اندازه آنها) را باتوجه بوجود پاره خطهائی که نسبت بهم گنگ‌اند مطرح کردند.[1] این‌تئوری در کتاب«مقدمات» اقلیدس شرح‌داده‌شده‌است وحالاهم بصورت‌ساده‌شده‌اش در دوره درسی کتابهای‌هندسه شرح داده میشود اما توجه باین مطلب که نسبت یك پاره خط بدیگری (که بعنوان واحد انتخاب شده) ، یعنی طول پاره خط ، میتواند مثل یك عدد مورد بررسی قرار گیرد (عددی که مفهوم‌آن تعمیم پیدا کرده است) برای یونانیها نتوانست بوجودآید: اصولا مفهوم عدد گنگ برای آنها بوجود نیامد .[2] این مطلب بعدها و بوسیله ریاضی دانان مشرق‌زمین مطرح‌شدوبطورکلی تعریف‌دقیق‌ریاضی عددحقیقی (تعریفی که‌مستقیما

۱ــ بوجودآمدن این‌تئوری به اودوکس Eudoxe دانشمند یونانی که درقرن چهارم قبل‌از میلاد میزیسته منسوب است .

۲ــ ازآنجا که اندازه گیری‌مقادیرتابع‌حساب نبودوجزءهندسه‌محسوب میشد، هندسه دریونان ریاضیات راتحت‌الشعاع قرارداده‌بود مسائلی ازقبیل حل‌معادلات درجه دوم‌راکه ماامروز درجبر مطرح می کنیم ، جزء هندسه دانسته و باکمك هندسه حل میکردند . کتاب «مقدمات» اقلیدس شامل تعداد زیادی از اینگونه مسائل است و ظاهراً «مقدمات» برای‌معاصرینش، آنطور که مامی‌فهمیم، تنها مربوط بهندسه نبود ، بلکه خلاصه‌اصول ریاضی بطور کلی بود. این‌تسلط‌هندسه تازمان‌دکارت ادامه‌داشت‌ولی دکارت برعکس هندسه‌راتابع جبرنمود. آثاراین‌تسلط هنوزهم دراسمهائی‌ازقبیل«مربع» و «مکعب» که برای درجه دوم و درجه سوم بکارمیروند حفظ شده است . «مکعب a» یعنی مکعبی باضلع a .

بهندسه متکی نباشد) دراین اواخر ودرسالهای ۷۰ قرن گذشته داده شد.[۱] یك چنین فاصله‌زمانی طولانی برای‌درك تئوری‌نسبت، نشان‌میدهد که مفاهیم‌انتزاعی باچه‌اشکالاتی بوجودمیآید وچقدرطول می کشد تادقیقا فرموله‌شوند.

۳- نیوتــون Neuton ضمن مشخص کردن مفهوم‌عدد حقیقی، در کتاب‌خودش بنام«حساب‌عمومی» نوشت: «عدد‌مجموعه‌ای از واحدهانیست، بلکه عدد نسبت‌تجریدی یك کمیت نسبت بکمیت دیگری، که بعنوان واحد انتخاب شده، می‌باشد». این عدد (نسبت) میتواند، صحیح، گویا یا گنگ (اگر کمیت مفروض نسبت بواحد گنگ باشد) باشد.

درنتیجه‌عددحقیقی، طبق‌مفهوم‌اولیه‌اش، چیزی‌جز نسبت‌یك کمیت به کمیت‌دیگری که‌بعنوان واحدانتخاب شده، نیست ودرحالت خاص عبارتست ازنسبت پاره خطها؛ ولی میتواند نسبت سطوح، وزنها وغیره هم‌باشد.

بنابراین، عددحقیقی عبارتست ازنسبت کمیات بطورکلی واین نسبت‌هم جدا از طبیعت‌وخاصیتی که مخصوص این کمیات است، مورد بررسی قرارمیگیرد.

همانطور که اعداد صحیح **مجرد**، نه‌بطور جداگانه، بلکه‌درارتباط بایکدیگر و درسیستم اعداد صحیح، موضوع ریاضیات را تشکیل می‌دهد، همانطور هم اعداد حقیقی **مجرد** تنها موقعی دارای‌محتوی‌بوده وبعنوان موضوع ریاضیات از آب‌درمیآید که‌در ارتباط بایکدیگر، یعنی‌درسیستم اعدادحقیقی، درنظر گرفته شود.

درتئوری اعدادحقیقی هم مثل حساب، قبل‌از همه، اعمالی که‌روی اعداد انجام میگیرد، معین‌میشود یعنی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وهمچنین نسبت بین‌اعداد که بوسیله‌کلمانی مثل «بزرگتراست» و «کوچکتر است» بیان میشود. این اعمال و نسبتها روابط واقعی کمیات مختلف رامنعکس‌میکند، مثلاجمع، افزایش پاره‌خطهارامنعکس میکند. عمل‌روی اعدادحقیقی ازقرون وسطی وبوسیله ریاضی دانان مشرق زمین‌شروع شده‌است. بعدهابتدریج مهمترین‌خاصیت سیستم اعدادحقیقی‌یعنی‌اتصالی بودن‌آن‌مطرح شد: سیستم اعدادحقیقی عبارتست ازشکل انتزاعی مقادیری که‌بطوراتصالی تغییر کرده وهرحالت ممکن راهم میتواند قبول کند.

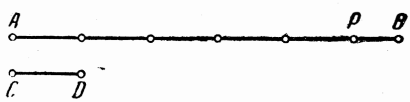
۱ــ صحبت برسر‌تعریف تشریحی نیست، بلکه‌منظور تعریفی‌است که‌مستقیماً پایه استدلالهائی است که ضمن‌مطالعه خواص اعداد حقیقی انجام میگیرد. طبیعی است که اینگونه تعاریف خیلی دیرتر بوجود آمد، یعنی وقتی‌که تکامل ریاضیات و بخصوص آنالیز بی‌نهایت کوچکها ایجاب کرد که‌تعریفی برای‌اعدادحقیقی، که‌متناظر با«متغیر x» باشد، داده‌شود. این تعریف باشکال مختلف در سالهای ۷۰ قرن گذشته بوسیله ریاضی دانان آلمانی و یرشتراس Wierstrass وددکند Dedekind وکانتور Cantor داده شد.

بنابراین موضوع حساب اعداد حقیقی (شبیه حساب اعداد صحیح) عبارتست از روابط کمی واقعی مقادیر اتصالی ، که بصورت کلی و کاملا جدا از هر موضوع و شیئی مشخص ، مطالعه میشود . در حقیقت، اینکه عدد حقیقی تا این اندازه مورد مصرف وسیع پیدا کرده است، بهمین علت است که مفهوم عدد حقیقی مشخص کننده یك کمیت متصل، بطور کلی است :

اندازه کمیات مختلف خواه طول وزن ، شدت جریان الکتریسیته ، انرژی و خواه هر کمیت دیگری باشد بوسیله عدد بیان میشود و روابط بین این کمیات هم همان روابط بین مقادیر عددی آنهاست .

برای اینکه مفهوم کلی اعداد حقیقی بتواند به‌پایه‌ای از تئوری ریاضی تبدیل شود باید تعریف ریاضی آن داده شود . این تعریف را بطرق مختلف میتوان داد ، ولی طبیعی‌تر از همه اینست که جریان تکاملی اندازه گیری کمیات‌را مأخذ قراردهیم (جریانی که سرچشمه عملی تعمیم مفهوم عدد بود) . مادر باره طول پاره خطها صحبت خواهیم کرد ولی خواننده بسادگی متوجه می‌شود که درباره هر کمیت دلخواه دیگرهم بهمین ترتیب میتوان قضاوت کرد ، بشرطی که فرض کنیم تقسیم آن کمیت تا بینهایت ممکن باشد .

فرض کنیم که میخواهیم پاره خط AB را بوسیله پاره خط CD (که بعنوان واحد انتخاب شده‌است)اندازه بگیریم (ش۱)، روی خط AB ومثلاازنقطه A باندازه



(ش۱)

پاره‌خطCDجدامی کنیم،واین‌عمل‌راادامه‌میدهیم،فرض کنیم که پاره‌خطCDباندازهn_0 مرتبه‌رویABجابگیرد. اگر بعدازاین‌عمل،ازپاره‌خطABقطعه‌ای‌مانندPBباقی‌بماند پاره خط CD را به ده قسمت‌تقسیم کرده وبقیه ABرا بااین‌قسمتهای یکدهمی‌اندازه میگیریم . فرض کنیم که در این باقیمانده ، n_1 قسمت یکدهمی جابگیرد . اگر بعد ازاین عمل هم باقیمانده ای داشته باشیم ، مقیاس خود را باز هم به ده قسمت می کنیم یعنی CD را بصد قسمت مینمائیم واین عمل را مرتباًتکرار میکنیم. ممکن است که جریان اندازه گیری بپایان برسد وممکن هم هست کـه ادامه داشته باشد ، ولی درهرحال درپاره خط AB باندازه n_0 برابرپاره خط CD و n_1 برابریکدهم آن و n_2 برابریکصدم آن و غیره وجود دارد . بعبارت دیگر نسبت AB به CD را با دقت لازم : تایکدهم ، یکصدم وغیره بدست خواهیم‌آورد ؛ بنابراین خود نسبت‌بوسیلهٔ

یك کسر اعشاری با n_0 عدد صحیح و n_1 دهم وغیره نمایش داده میشود .

$$\frac{AB}{CD}=n_0/n_1n_2n_3\ldots$$

این کسر میتواند نامحدود باشد واین حاکی از آنست که تدقیق اندازه گیری را میتوان بی‌حد دانست .

بنابراین نسبت پاره خطها(و کمیات بطور کلی) همیشه بوسیله کسراعشاری (که ممکن است بپایان برسد ویا بی‌انتها باشد) نمایش داده میشود . ولی در کسر اعشاری دیگر اثری از کمیات مشخص نیست و یك نسبت مجرد یعنی عدد حقیقی را بدست میدهد . عدد حقیقی‌ازنظرشکل‌ظاهریش ممکن‌است بصورت کسراعشاری (که‌نامحدود ویامحدود است) معین شود[1] .

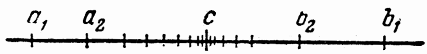
برای اینکه کاررا بپایان برسانیم، باید اعمال مربوط بکسرهای اعشاری (جمع وغیره) را هم مشخص کنیم و این بدانجهت است که اعمال مربوط بکسرهای اعشاری متناظربا اعمالی هستند که روی کمیات انجام میگیرد ، مثلا برای جمع پاره خطها ، طولهای آنها رویهم گذاشته می شود یعنی طول پاره خط $AB+BC$ مساوی مجموع طولهای AB و BC است . در تعیین اعمال مربوط باعداد حقیقی این اشکال وجود دارد که این اعداد در حالت کلی بصورت کسرهای اعشاری نامحدود هستند ، در صورتی که قوانین‌معمولی‌مربوط باعمالی است که درباره کسرهای‌اعشاری محدود انجام میگیرد باتوجه باین مطلب ، تعریف دقیق اعمالی که درباره کسرهای نامحدود انجام می گیرد بطریق زیردیده میشود :

مثلافرض کنید که میخواهیم دوعدد a و b راباهم جمع کنیم. کسرهای‌اعشاری مربوطه را باتقریب دلخواه و مثلا تا یك میلیونیم تقریب انتخاب میکنیم وآنهاراویهم میریزیم،دراینصورت مجموع $a+b$ را باتقریب مربوطه بدست‌آورده‌ایم (تادومیلیونیم تقریب ، زیرا اشتباهات a وb باهم جمع میشود) و بنابراین میتوانیم مجموع دوعدد را **با دقت دلخواه** بدست بیاوریم و این بآن معناست که مجموع آنها کاملا معین شده است ، اگرچه درهرحال این مجموع تنها باتقریب معینی مشخص می‌شود ، باری این مجموع منظور مارا تأمین میکند زیرا هریك ازمقادیر a و b هم باتقریب معینی اندازه گرفته می‌شود ومقداردقیق آن که بصورت کسر اعشاری نامحدودی تصور می‌شود باین معنی است که میتوانیم اندازه کمیت را بطورپایان ناپذیری دقیق و دقیق‌ترنمائیم.

۱ــ دراینجا کسرهائیکه دوره تناوبی ۹ داشته باشندموردبحث مانیست ، چنین کسرهائی طبق قانون مشهوری که ازمثال ۰/۱۴۰۰۰ = ... ۰/۱۳۹۹۹۹ روشن است هم‌ارزبا کسرهائی هستند که دوره تناوبی۹ ندارند .

نسبتهائی را که باجملات «بزرگتراست» و«کوچکتراست» بیان میشود میتوان از روی جمع تعریف کرد. $a>b$ است وقتی که عددی مانند c وجود داشته باشد بطوریکه $a=b+c$ باشد (صحبت برسراعداد مثبت است).

اتصالی بودن سلسله‌اعداد حقیقی باینوسیله بیان می‌شود که اگراعداد a_1وa_2و... صعودی و اعداد b_1وb_2و... نزولی باشند بطوریکه همیشه اعداد دستهٔ دوم بزرگتر از اعداد دسته اول باقی بماند؛ بین این دو دسته‌عدد، عددی مانند c وجود خواهد داشت.



(ش۲)

اگرهریك‌ازنقاط خط راستی راطبق‌قانون معینی متناظر بایکی از این‌اعداد بدانیم میتوان همین مطلب را روی‌خط راست نمایش داد (ش۲) دراینجابخوبی دیده میشود که وجود عدد c و نقطه متناظرش درست بمعنای فقدان بریدگی درسلسله اعداد ، یعنی پیوستگی سلسله اعداد است .

۴ ـ درنمونه تأثیرمتقابل حساب وهندسه میتوان دید که تکامل ریاضیات ناشی ازجریان برخورد تعداد زیادی عناصرمخالف هم ؛ مانند مشخص و مجرد ، حالت‌خاص وحالت کلی، شکل و مضمون، محدود ونامحدود ، انفصالی و اتصالی وغیره که دردرون آن بهم‌آمیخته‌اند میباشد .

برای مثال عناصر مخالف مشخص و مجرد را درمورد بوجودآمدن مفهوم عدد حقیقی دنبال کنیم . همانطور که دیدیم عدد حقیقی جریان تکاملی **کاملا دقیق** اندازه گیری‌ویابه‌مفهوم دیگراندازه گیری‌بی‌نهایت دقیق کمیات را منعکس می کند و این بآن مناسبت است که در هندسه اندازه ها و اشکالی که دقت ایده آلی دارند مورد بررسی‌قرارمیگیرد . درحالیکه‌اندازه واشکال‌واقعی‌اشیاء قابل‌تغییر بوده وبعضی‌نامشخصیها دارند ، دربالا درباره اندازه گیری کاملاایده‌آلی‌پاره خط صحبت کردیم .

باری اشکال هندسی کاملا دقیق واندازه بی‌نهایت دقیق کمیات، مفاهیمی‌انتزاعی هستند . شکل هیچ شیئی‌مشخصی مطلقاً دقیق نیست همانطور که هیچ کمیت مشخصی را نه تنها نمیتوان کاملا دقیق اندازه گرفت ، بلکه اصولا مقدار مطلقاً دقیق **ندارد**. مثلا اگربخواهیم طول یك خط کش را بیش از حد مقیاس یك اتم دقیق کنیم مفهومی نخواهد داشت . همیشه اگر دقیق کردن کمیتی از حد معینی تجاوز کند ، در کمیت

تغییر کیفی حاصل شده و مفهوم اولیه‌اش را بکلی از دست خواهد داد. مثلا فشار گاز را نمیتوان بیش از نیروی ضربه یك ملکول دقیق کرد و یا اگر بار الکتریکی تا حد باریك الکترون دقیق شود اتصالی بودنش ازبین میرود و غیره. ازآنجا که درطبیعت، اشیائی که دارای اشکالی بادقت ایده‌آلی باشند، وجود ندارد. درك این مطلب را که نسبت قطر مربع بضلع آن مساوی $\sqrt{2}$ است نه تنها نمیتوان ازاندازه گیری مستقیم بدست آورد، بلکه اصولا برای هیچ مربع موجود مشخصی، این مطلب مفهوم ندارد.

همانطور که دیدیم این نتیجه که قطروضلع مربع نسبت بهم گنگ‌اند از قضیه فیثاغورث بدست آمد، این نتیجهٔ تئوریك، ازتکامل مفروضات تجربه بدست آمده است یعنی نتیجه بکار بردن منطق در احکام هندسی، احکامیکه خود از تجربه بدست آمده اند.

بنابراین مفهوم پاره خطهای گنگ وازآن کلی‌ترمفهوم عدد حقیقی انعکاس صرفاً ساده ومستقیمی ازمفروضات تجربی نیست، بلکه ازآن تجاوزمیکند. علت این مطلب معلوم است: عدد حقیقی هیچ کمیت مشخص مفروضی‌را منعکس نمیکند، بلکه کمیت را بطورکلی، کمیتی که از هرچیز مشخصی منتزع شده منعکس مینماید، بعبارت دیگر عدد حقیقی چیزی را که در همه کمیات منفرد واقعی مشترك است منعکس میکند. این چیزمشترك بخصوص مربوط باینست که اندازهٔ یك کمیت را بطورکلی میتوان دقیق نمود واگر کمیت مشخص‌مورد نظرنباشد، حد این‌تدقیق ممکنه (که برای هر کمیت مختلف، مختلف بوده‌ومربوط به طبیعت مشخص‌هر کمیت است) نامحدود شده واز بین میرود.

بنابراین تئوری **ریاضی** کمیتها، که آنهارا منتزع از طبایع منفردشان مورد بررسی قرار میدهیم، الزاماً ببررسی امکان تدقیق نامحدود کمیتها و بالنتیجه **الزاماً** بمفهوم عدد حقیقی منجرمیشود. ضمناًریاضیات که‌تنها، خاصیت مشترك کمیتهای‌مختلف را منعکس می کند، خصوصیت هرحالت جداگانه را در نظر نمیگیرد، همانطور که نویسنده «دفاترفلسفی» متذکرمیشود: «هر تعمیمی شامل‌کلیه خصوصیات حالات خاص نیست . . .»

ریاضیات با انتخاب خواص عمومی، مفاهیم جداگانه‌ومشخص انتزاعی‌را که خود بعمل‌آورده است بدون توجه بحدود واقعی مورد مصرف آنها،مورد بررسی‌قرار میدهد. این بخصوص باین‌علت‌است که حدود مورد مصرف بوجوه مشترك پدیده‌ها مربوط نیست بلکه بخواص مشخص پدیده هائی که مورد بررسی قرار میگیرد و به تغییر کیفی این پدیده‌ها مربوط است. بنابراین وقتی که ازریاضیات استفاده می کنیم بایستی دید که

آیا بکار بردن این و یا آن تئوری معنی و اساسی دارد یانه ؟ باین ترتیب بررسی یك شیئی بعنوان یك شیئی متصل و توضیح آن بوسیله کمیتهای متصل تنها وقتی ممکن است که بتوان آنرا ازساختمان اتمیش جدا کرد و این عمل هم تنها باشرایط معین ودر موارد خاص ممکن است .

باوجوداین، اعدادحقیقی‌وسیله ممکن ومطمئن تحقیق‌ریاضی کمیتها وجریانهای [پروسه Procès] واقعی متصل میباشد ، تئوریهای آنها بوسیلهٔ عمل یعنی با بکار بردن وسیع در فیزیك وتکنیك و شیمی پایه‌گذاری شده است ، بنا بر این عمل ثابت میکند که مفهوم عدد حقیقی خواص مشترك کمیتهارا بدرستی منعکس میکند . امااین صحت بی‌انتها ومطلق نیست، تئوری اعداد حقیقی‌را نمیتوان بعنوان یك تئوری منجمد مطلق بررسی کرد ، یعنی نمیتوان این تئوری را بطور انتزاعی وکاملا جدا از واقعیت بسط وتوسعه داد . خود مفهوم عدد حقیقی هم به‌پیشرفت خود ادامه میدهد و هنوز تا پایان مطلق خود فاصله دارد .

۵ ـ نقش نمونه دیگری ازعناصر متضاد یعنی انفصال و اتصال را هم میتوان بر مبنای تکامل مفهوم عدد تعقیب نمود ، قبلا دیدیم که کسر ها از تقسیم کمیات اتصالی بوجودآمده‌اند .

درباره‌تقسیم ، یك مسئله شوخی‌آمیزولی‌کاملاآموزنده وجود دارد: مادر بزرگی سه سیب زمینی خرید و میخواست‌آنهارا بطورمساوی بین دو نوه اش تقسیم کند ، چه بایست می کرد ؟ جواب چنین است : بایستی ازآنهـا پوره درست میکرد و سپس بـین نوه هایش تقسیم مینمود .

باری این شوخی واقعیتی را روشن میکند ؛ اشیاء منفرد بدینجهت قابل تقسیم نیستند که شیئی تقسیم شده تقریباً همیشه چیزی غیرازآنست که دراول بود، این‌مطلب از امثله « ثلث آدم » یا « ثلث تیر کمان » که قبلا ذکر کردیم روشن شد . برعکس کمیات یااشیاء اتصالی ویکنواخت‌بسادگی‌تقسیم وجمع می‌شوند بدون‌اینکه ماهیتشان را ازدست بدهند ، پوره یکی ازامثله عالی اینگونه اشیاءِ یکنواخت است کـه ، اگر چه تقسیم شده نیست ، ولی درعمل می‌تواند بسادگی‌بهراندازه سهمهای کوچك دلخواه تقسیم شود ؛ طول ، سطح وحجم هم دارای همین خاصیت اند. در مفهوم اتصالی بودن، این مطلب هم نهفته است کـه اگر در واقع تقسیم نشده است ولی امکان تقسیم آن تا بینهایت وجود دارد .

بنابراین ما بادوعنصرمتضاد روبروهستیم : ازیکطرف اشیاء منفرد غیرقابل‌تقسیم ویاآنطور که مشهور است اشیاء منفصل و ازطرف دیگر اشیائی که کاملا قابل‌تقسیم‌اند

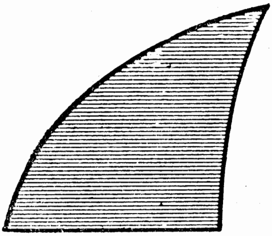
ولی تقسیم نشده و متصل اند . البته این دوعنصر متضاد همیشه باهم وجود دارد ، زیرا نه اشیائی که مطلقاً غیرقابل تقسیم باشد وجود دارد و نه اشیائی که کاملا اتصالی باشد ؛ این دوگانگی هرشیئی نه‌تنها واقعیت دارد بلکه غالباً درمورد یك شیئی این ودرمورد شیئی دیگر آن جنبهٔ،تعیین کننده می‌شود .

ریاضیات با انتزاع شکل‌ازمحتوی، شکل‌را به انفصالی و اتصالی تقسیم میکنید. واحد، تجسم ریاضی‌اشیاء منفرد و مجموع واحد ها تجسم ریاضی مجموعه اشیاءِ منفرد است واین ، تجسم انفصال بصورت خالص و مطلق خود میباشد ، انفصالی کـه از خواص دیگرجدا شده است . اتصالی بودن اشکال هندسی ودرحالت ساده تراتصالی‌بودن خط راست ، تجسم ریاضی و درعین حال پایه ومنشاء مفهوم اتصال را بدست میدهد .

درمقابل مادونوع تضاد وجود دارد: یکی‌تضاد بین انفصال و اتصال ودیگری تضاد بین تجسم ریاضی و انتزاعی آنها یعنی تضاد بین عدد صحیح وامتدادهای هندسی .

اندازه گیری عبارت ازجمع این ضدین است : کمیات متصل بوسیلهٔ واحد های منفصل اندازه گرفته میشود . اما اگرواحد ها غیر قابل تقسیم باشد کار اندازه گیری بپایان نمیرسد و ناچاریم که تقسیمات کسری واحد اولیه را هم وارد عمل کنیم ، باین ترتیب اعداد کسری بوجود میآید ؛ مفهوم عدد،بخصوص درنتیجه اجتماع ضدین‌نامبرده پیش میرود .

سپس در درجهٔ بعدی انتزاع ، مفهوم پاره خطهای گنگ و درنتیجهٔ مفهوم عدد حقیقی، بعنوان تجسم انتزاعی اندازهٔ کاملا دقیق کمیات بوجود آمـد . ولی‌این مفهوم یکباره پیدا نشد، راه‌طولانی تکامل آن‌ازمیان مبارزه‌عناصرمتضادانفصال‌واتصال عبورمیکند.


(ش۳)

همانطور که گفته‌شد دموکریت Démocrite فرض میکرد که اشکال از اتمها تشکیل شده‌است وباین وسیله اتصال را بانفصال مربوط میکرد ، ولی کشف پاره خطهای گنگ باعث شد که ازاین فرض صرفنظر شود؛ پس ازآن دیگرکمیات اتصالی، ازعناصرجداگانه‌اتمها یانقاط ــ تشکیل‌نشده‌بود ، دیگرنمیشداین کمیات را بوسیلهٔ اعداد بیان کرد ، زیرا در آن زمان اعداد دیگری بجز اعداد صحیح و کسری نمیشناختند .

تضادانفصال واتصال درقرن‌هجدهم (وقتی که پایه‌های حساب‌دیفرانسیل‌وانتگرال Calcul différentiel et intégral گذاشته می‌شد) بانیروی جدیدی در ریاضیات

ظاهرشد . اینجا صحبت برسرمقادیر بینهایت کوچك بود . از نقطه نظر بعضی‌ها عناصربی‌نهایت کوچك بعنوان ذراتی از کمیات متصل که «غیرقابل تقسیم» بود و«واقعاً» هم بینهایت کوچکندتصورمیشد (مثل اتمهای دموکریت) ولی دراینجا عده‌آنهابینهایت زیاد بود . محاسبه سطح و حجم [انتگراسیون intégration] بعنوان مجموع بینهایت‌جزء بینهایت کوچك درنظر گرفته‌میشد. مثلا سطح‌بعنوان «مجموع‌خطوطی که سطح ازآنها تشکیل شده است» فهمیده میشد (ش۳) وباین ترتیب اتصالی بودن دوباره بنحوی به‌انفصالی بودن منجرمیشد ، منتهی بشکلی بغرنج تر و درسطحی بالاتر . ولی این نقطه نظرقانع کننده نبود وبعنوان نظرمخالف آن از همان دوره نیوتون پایه های مربوط به‌متغیرهای **متصل** ودرك‌بینهایت کوچك‌ها بعنوان کمیات **متغیری** که‌نزولی بوده و بنابراین میتواند بهر اندازه که بخواهیم کوچك شود گذاشته شد . این درك در نیمه اول قرن نوزدهم (وقتیکه تئوری دقیق حدود بوجود آمد) عمیق‌ترشد . دیگر پاره خطها ازنقاط ویاعناصر«غیرقابل‌تقسیم» تشکیل نمیشد ، بلکه بعنوان یك امتداد ، بعنوان یك ملاءِ متصل ، یعنی‌مکانیکه فقط میتوان نقاط منفرد ومقادیر مشخص کمیت متغیررا روی‌آن معین کرد ، فهمیده میشد؛ ریاضی دانان‌هم در باره «امتداد» همین نظر را داشتند . دراجتماع انفصال و اتصال ، دوباره اتصال تسلط پیدا کرد .

باری تکامل‌آنالیز ایجاب میکرد که تئوری کمیات متصل بیشتر دقیق‌شده وقبل ازهمه تعریف‌کلی عدد حقیقی بعنوان مقداردلخواه یك کمیت متغییر داده شود . سپس درسالهای۷۰ قرن گذشته‌تئوری‌اعداد حقیقی‌بوجودآمد که پاره خطهاراهمچون‌مجموعه‌ای ازنقاط ومتناظر با فواصل تغییریك مُتغیر و بعنوان مجموعه ای ازاعداد حقیقی معرفی میکرد . دو باره اتصال از نقاط منفرد منفصل تشکیل میشد و خاصیت اتصالی بودن در ساختمان مجموعه‌ای که‌ازنقاط تشکیل شده‌است بیان‌میشد. این‌نظریه منجربموفقیتهای بزرگی درریاضیات شد و به‌نظرمسلط وحاکم تبدیل گردید . باوجود این دراین‌نظریه هم اشکالات عمیقی وجود داشت وهمین اشکالات‌باعث شد که‌کوششهائی درجهت‌برگشت بنوع جدیدی از اتصال خالص انجام گیرد . همچنین راههای دیگری هم برای معرفی پاره خط بعنوان مجموعه نقاط پیش بینی میشود و نقطه نظرهای جدیدی درباره مفهوم عدد ، متغییر و تابع بوجود میآید . تکامل تئوری همچنان ادامه دارد و باید منتظر قدمهای بعدی‌آن بود .

۶ـ تأثیر متقابل حساب و هندسه تنهادرمورد بوجودآمدن مفهوم «عددحقیقی» نقش خود را بازی نکرد . همین تأثیر متقابل هندسه وحساب یادقیق‌تربگوئیم هندسه وجبربود که باعث‌تثبیت‌مفهوم اعدادمنفی‌ومختلط (یعنی عددی‌بشکل $(a+b\sqrt{-1}$ در

ریاضیات‌شد. اعدادمنفی بوسیلهٔ نقاطی بیان‌میشود که درسمت چپ نقطه‌ای که متناظر باصفر است واقع باشد. اعدادمختلط هم بوسیله نقاط واقع برصفحه بیان میشود و بخصوص این نمایش هندسی موقعیت عدد موهومی را، که تا آنزمان نا مفهوم باقیمانده بود؛ تحکیم کرد.

مفهوم کمیت تکامل بیشتری پیدا کرد: مثلا کمیات برداری که پاره خطهای جهت دار را توضیح میداد و کمیات باز هم عمومی‌تری (تانسورها $=$ Tenseurs) بوجودآمد که درهمه این موارد مجدداً جبرباهندسه متحد میشود.

اتحاد تئوریهای مختلف ریاضی همیشه نقش بزرگی را بازی کرده و هنوز هم میکند، نقشی که گاهی تعیین کننده است. مابعداً این مطلب را درنمونه های بوجود آمدن هندسه تحلیلی Céométrie analytique ، حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریه توابع متغیر مختلط Théorie des fonctions des variables Complexes و نظریه جدیدی که آنالیزفونکسیونل Analyse fonctionnelle نامیده میشود و سایرتئوریها خواهیم دید. درخود تئوری اعداد یعنی در مطالعه اعداد صحیح هم روشهای مربوط باتصال باموفقیت زیادی بکار میرود: آنالیزبی‌نهایت کوچکها Analyse infinitésimale و آنالیز هندسه که فصول مفصلی مانند«تئوری تحلیلی اعداد» و «هندسه اعداد» را بوجودآورد.

ازبعضی لحاظ میتوان درهم آمیختگی مفاهیمی‌راکه از حساب و هندسه ریشه گرفته است، یعنی مفاهیم کلی اتصال و عملیات جبری (بعنوان تعمیم عملیات حساب) را درپایه‌های ریاضی مشاهده کرد. اما دراینجا مانمیتوانیم درباره این تئوریهای‌مشکل صحبت کنیم. هدف مادراین قسمت اینست که لااقل یك تصور کلی درباره تأثیرمتقابل مفاهیم و اجتماع ومبارزه ضدین در ریاضیات، بدست دهیم و در اینجا نمونه تأثیر متقابل حساب و هندسه را در نظر گرفته وآنرا هم در نمونه تکامل مفهوم عدد مورد مطالعه قرار دادیم.

۵

دورهٔ ریاضیات مقدماتی

۱- تکامل ریاضیات باینجا منجرنمیشود که قضایای جدیدی رویهم انباشته شود بلکه متضمن تغییر کیفی ریاضیات است . ولی این تغییر کیفی بطریق شکست ونابودی نظریه‌های موجود بدست نمیآید ، بلکه از راه عمیق کردن و تعمیم نظریه‌های موجود و ازراه بوجودآمدن نظریه های تعمیم دهنده جدید (که برپایه پیشرفتهای قبلی تدارك دیده شود) صورت میگیرد.

بایك نظر کلی درتاریخ ریاضی میتوان چهار دوره اساسی که ازلحاظ کیفی با هم اختلاف دارد تشخیص داد : البته، مرزبندی دقیق این دوره‌ها ممکن نیست زیراخطوط اساسی هریك ازآنها کم و بیش بتدریج بوجود آمده است ولی اختلاف این دوره ها و عبور ازیکدوره بدوره دیگر کاملامشخص است .

اولین دوره عبارت از دوره‌ای است که ضمن آن ریاضیات بعنوان یك علم مستقل وکاملا تئوریك بوجودآمد . این دوره از زمانهای باستانی شروع وبقرن پنجم قبل از میلاد ختم می‌شود . واین بشرطی است که ریاضیات «خالص» و ارتباط منطقی بین قضایا واثبات آنها زودترازآن دریونان بوجود نیامده باشد (درقرن پنجم قبل از میلاد احکام منظم هندسی مثل « مقدمات» بقراط [= هیپوکراتس Hippocrates] خیوسی بوجودآمد) ، این دوره، دوره شکل گرفتن حساب وهندسه بود وباندازه‌کافی آنرا مورد بررسی قرار دادیم . درآنزمان ریاضیات ازارتباط مستقیمی که قوانین جداگانه ومنفرد باعمل داشتند بوجود میآمد ، قوانینی که خود ناشی از تجربه بوده ولی هنوز بعنوان سیستم واحدی که منطقاًبهم مربوط باشد تشکیل‌نشده بود ؛ خصیصه نظری بودن‌ریاضی که همراه بااثبات منطقی قضایای آن باشد خیلی بتدریج و متناسب بامواد خام موجود بوجودآمد . حساب وهندسه هم ازیکدیگرجدا نبوده و بطورجدی درهم آمیختهبود .

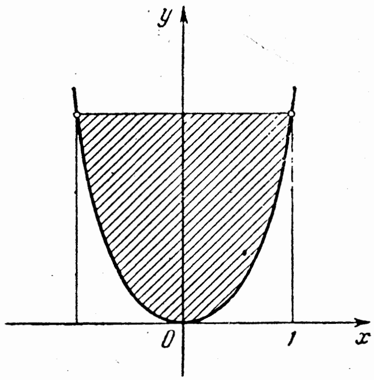
دوره دوم را میتوان بعنوان دوره ریاضیات مقدماتی مشخص نمود ؛ ریاضیات مقدماتی عبارت از ریاضیات مقادیر ثابت است که نتایج ساده شده آن محتوی برنامه دوره مدارس امروز را تشکیل میدهد . این دوره نزدیك بدوهزارسال ادامه داشت ودر

قرن هفدهم بابوجودآمدن ریاضیات «عالی» بپایان رسید . مادر این قسمت بطور مفصل درباره این دوره بحث میکنیم ودرقسمتهای بعدی بدوره های سوم وچهارم - دوره‌بوجود آمدن و تکامل آنالیز و دوره ریاضیات معاصر ـ خواهیم پرداخت .

۳ ـ دوره ریاضیات مقدماتی‌را میتوان بنوبه خود بدوقسمت که ازلحاظ مضمون باهم اختلاف دارد تقسیم کرد: دوره تکامل هندسه (تاقرن دوم میلادی) ودوره‌ایکه‌آنرا بیش‌ازهمه میتوان دوره تکامل جبردانست (ازقرن دوم تاهفدهم میلادی) . ازنظرشرایط تاریخی هم دوره ریاضیات مقدماتی بسه دوره تقسیم میشود که میتوان‌آنها را دوره های « یونانی » ، « شرقی » و « دوره تجدد Renaissance اروپائی » نامید . دوره یونانی مصادف بازمان شکفتگی عمومی تمدن یونان است که ازقرن هفتم قبل ازمیلاد شروع میشود و درقرن سوم قبل ازمیلاد یعنی زمان هندسه دانان بزرك دنیای باستان،اقلیدس Euclide ، ارشمیدس Archimède و آپولونیوس Apollonius باوج خود میرسد ودرقرن ششم بعدازمیلاد خاتمه مییابد . ریاضیات و بخصوص هندسه در یونان به شکفتگی حیرت آوری رسید و اگر تعداد کمی از اصل آثار ریاضی دانان یونانی بمارسیده است، اسامی تألیفات بسیاری از آنها را میدانیم . ضمناً باید متذکرشد ، در همان زمان که یونان تحت انقیاد روم بود ، توانست علم را بیك چنین شکفتگی‌برساند در حالیکه خود روم که درقرن اول میلادی دوران شکوفان خود را میگذراند چیزی بریاضیات اضافه نکرده است .

یونانیها نه‌تنها هندسه مقدماتی‌را تکامل دادند ودستگاه منظمی ازآن باندازه‌ای که در«مقدمات» اقلیدس داده شده وحالاهم درمدارس‌آموخته میشود بوجودآورند،بلکه به‌نتایج بسیار زیادی هم رسیدند . مثلاآنها مقاطع مخروطی : بیضی، هذلولی و سهمی را مطالعه میکردند، بعضی ازقضایای مربوط بعلمی راکه امروز«هندسه تصویری»نامیده میشود ثابت میکردند ، بر اساس احتیاجات نجومیشان هندسه کروی را بوجود آوردند (قرن اول میلادی) همچنین مقدمات مثلثات را فراهم کردند و نخستین‌جداول‌سینوسها را محاسبه نمودند (هیپارك Hipparque در قرن دوم قبل از میلاد و کلودبطلمیوس Claude-ptolémée در قرن دوم میلادی [۱]) . یك سلسله مساحات و احجام

۱ـ بطلمیوس بعنوان دستگاهی معروف‌است که درآن زمین مرکزجهان‌حساب شده و حرکت سیارات بعنوان حرکت بدور زمین شرح داده شده است . این سیستم بوسیله کپرنیك Nicolas Copernic رد شد .



(ش ٤)

اشکال بغرنج رامعین کردند، مثلاارشیمدس سطح یك قطعه سهمی را معین کرد و ثابت نمود که این سطح دوسوم سطح مستطیلی است که شامل این قطعه سهمی باشد (ش ٤) یونانیها حتی قضیه‌ای بدست آوردند که طبق آن ازمیان احجامی که سطح کلشان باهم برابر باشد، بزرگترین حجم مربوط بکره است، ولی اثبات این قضیه بما نرسیده است ومشکل هم بنظرمیرسد که یونانیها اثبات کامل آنرا داده باشند، زیرا اثبات آن مشکل است . اثبات این قضیه در قرن ۱۹ و باکمك حساب انتگرال داده شد .

در رشته حساب و مقدمات جبرهم سهم یونانیها کم نیست . همانطورکه قبلا گفتیم آنها مقدمات «تئوری اعداد» رافراهم کردند. مثلا میتوان‌از بررسیهای آنها درباره اعداد اول (قضیه اقلیدس درباره اینکه تعداداعداد اول بی‌نهایت است و«غربال‌اراتستن» Eratosthène برای پیداکردن اعداد اول) و همچنین پیداکردن ریشه صحیح معادلات (دیوفانت Diophante در حدود سالهای ۲٤٦ و ۳۳۰ میلادی) نام برد

گفتیم که یونانیها کمیتهای گنگ را هم کشف کردند ولی این کمیات گنگ را بطریق هندسی و بعنوان پاره خطها درك میکردند ، بااین ترتیب مسائلی را که امروز بطریق جبری بررسی میکنیم ، یونانیها بطریق هندسی بررسی میکردند ، بهمین‌طریق معادلات درجه دوم راحل میکردند و عبارات گنگ را نمایش میدادند . مثلا معادله‌ای را که امروز بصورت $x^2+ax=b^2$ مینویسیم ، اینطور بیان میکردند: پاره خطی مانند x چنان پیداکنید که اگر مربعی بضلع x را بامستطیلی باضلاع a و x جمع کنیم، مستطیلی بدست بیاوریم که معادل بامربع مفروضی بضلع b باشد . تسلط‌هندسه در ریاضیات تامدتها پس از یونانیهاهم ادامه داشت . یونانیها همچنین استخراج ریشه دوم و ریشه سوم و خواص تصاعدهای حسابی و هندسی را میدانستند .

بنابراین یونانیها مواد اولیه زیادی ازجبرمقدماتی‌معاصررا در دست داشتند ولی آنچه که اساسی بود یعنی اعداد منفی و عدد صفر ، اعداد گنگی که جدا ازهر مفهوم هندسی درنظرگرفته‌شده باشد وبالاخره دستگاه‌تکامل یافته علامات‌حرفی راکم داشتند ولی دیوفانت علامتهای حرفی را برای مجهول و درجه‌آن بکارمیبرد وعلامات‌مخصوصی هم برای جمع وتفریق وتساوی داشت وبااین‌ترتیب معادلات جبری‌را ، منتهی باضرایب عددی مشخصی، مینوشت .

یونانیها درهندسه تانزدیکیهای ریاضیات «عالی» رسیدند : ارشمیدس در محاسبه

سطوح واحجام بحساب انتگرال وآپولونیوس دربررسی‌های خود درموردمقاطع مخروطی بهندسه‌تحلیلی نزدیك شدند. درحقیقت آپولونیوس معادلات این‌منحنی‌هارا، منتهی‌بازبان هندسی ، بیان میکند-۱- ولی آنهانه‌مفاهیم کلی مقادیرثابت ومتغیررا داشتندونه‌انواع علامات‌حرفی که درجبرلازم بود، درحالیکه همین علامات(که دردوران دیگری بوجود آمد) ، توانست بررسیهای جبر را بمنبع نظریه‌های جدیدی که منجر بریاضیات عالی میشد هدایت کند . پس ازهزاران سال ، کسانیکه این نظریه‌ها را بوجودآوردند تاحد زیادی بمیرات دانشمندان یونانی مراجعه میکردند . اثردکارت بنام «هندسه»(۱۶۳۷) که پایه های هندسه‌تحلیلی رامیگذارد درست ازتوضیح وتشریح همان مسائلی شروع میکند که یونانیها موفق بحل آنها نشده بودند .

این یك قانون کلی‌است: نظریه های کهنه وقدیمی‌مرتباً مسائل جدیدتروعمیق تری بوجود می‌آورند واین بجائی میرسد که گوئی پوسته قدیمی‌تاب تحمل آنهاراندارد ونیازمند اشکال وافکارجدیدی میشود . بوجودآمدن فرمها وایده‌های جدید هم ممکن است احتیاج بشرایط جدیدی داشته باشد . در اجتماع قدیم شرایط انتقال بریاضیات عالی وجود نداشت ونمیتوانست وجود داشته باشد . این شرایط دردوره جدید وباتکامل علوم طبیعی فراهم شد واین‌تکامل هم بنوبه خود درقرون ۱۶ و ۱۷ مشروط‌باحتیاجات جدید تکنیك وصنعت و بنابراین مربوط به پیدایش و تکامل سرمایه داری بود .

یونانیها هندسه مقدماتی را تا آنجا که ممکن بود ، پیش بردند و درست بهمین علت است که تکامل درخشان هندسه درقرون اولیه پس ازمیلاد قطع شد وجای خودرا به‌پیشرفت مثلثات و جبردر آثاربطلمیوس و دیوفانت و دیگران داد . کارهای دیوفانت را میتوان بعنوان شروع دوره‌ای که بطورعمده متعلق به جبر است دانست ولی اجتماع کهنه‌ای که درآستانه سقوط بود دیگرنمیتوانست علم را دراین‌جهت جدید بجلوبراند وتکامل دهد .

باید متذکرشد که قرنها قبل از این زمان حساب در چین بسطح بالائی رسیده بود . درقرن اول و دوم قبل از میلاد قوانین حل حسابی دستگاه سه معادله درجه اول داده شده بود . ضمناً برای نخستین بار درتاریخ ازضرایب منفی استفاده کردند و قوانین مربوط به‌اعمال‌بامقادیرمنفی‌را تنظیم نمودند(ولی تنهاجوابهای مثبت‌را جستجومیکردند همانطورکه بعدها دیوفانت هم همین‌کاررا میکرد). درهمین کتب طرق تعیین ریشه‌های

۱ـ او «معادله» مقاطع مخروطی را نسبت برأس آنها میدهد. مثلا «معادله» سهمی $y^2 = 2px$ را باین ترتیب بیان میکند : مربعی بضلع y معادل است با مستطیلی باضلاع $2p$ و x . (البته بجای p و x و y ، پاره خطهای متناظربا آنهارا نمایش میداد).

دوم و سوم هم ذکر شده است .

۳ـ باپایان رسیدن علم یونانی ، دوران رکود علمی دراروپا فرا رسید ومرکز پیشرفت ریاضیات بهند وآسیای میانه و کشورهای عربی[1] منتقل شد . دراینجادرجریان هزارسال‌ازقرن‌پنجم تاپانزدهم میلادی، ریاضیات وبطورعمده‌آنچه که مربوط‌باحتیاجات محاسبه‌ای وبخصوص نجوم بود ، پیشرفت زیادی کرد : ریاضی دانان شرق غالباً منجم هم بوده اند . آنها تقریباً هیچ چیز بدانش هندسه یونانی اضافه نکردند و دراین علم تنها ابداعات یونانیها را برای نسلهای بعدی حفظ کردند ، درعوض ریاضی دانان هند و عرب و آسیای میانه دررشته‌های حساب‌وجبر بموفقیتهای بزرگی نائل آمدند[2]

همانطور که قبلا گفتیم هندیها سیستم امروزی شمار را اختراع و اعداد منفی‌را وارد درمحاسبه نمودند ، آنها تقابل اعداد مثبت ومنفی‌را متناظر باتقابل دارائی وقرض یا دوجهت در روی خط مستقیم میدانستند . بالاخره‌آنهابااعداد گنگ هم مثل‌اعداد گویا ، وبرخلاف یونانیها بدون استفاده ازهندسه ، شروع بعمل کردند . آنهاهمچنین برای اعمال جبری، که شامل استخراج‌ریشه هم میشد ، علامات مخصوصی داشتند . دانشمندان هند وآسیای میانه بخصوص باین مناسبت که از اختلاف بین مقادیر گنگ وگویادست پاچه وسردرگم نشدند، توانستند بر«تحمیلات» هندسه، که از خصیصه های ریاضیات یونانی بود ، فائق‌آیند و راه تکامل جبرمعاصررا ، آزاد ازفشارپوسته سنگین هندسی که بوسیله یونانیها بوجودآمده بود ، کشف کنند .

شاعرو‌ریاضی دان بزرگ عمرخیام (حدود ۱۰۴۸ــ۱۱۲۲) و نصیرالدین طوسی بوضوح‌نشان‌دادند که هرنسبتی ازمقادیررا، خواه گنگ باشد خواه گویا، میتوان‌بوسیله عدد نمایش داد وبهمین علت‌است که درآثاراین دانشمندان همان تعریف کلی که‌نیوتون درباره عدد نمود و ماقبلا ذکر کردیم ، دیده می‌شود(تعریفی که دربارهٔ اعداد گویا وهم درباره اعداد گنگ صادق باشد) . اهمیت بزرگ این موفقیتها وقتی روشن میشود که

۱ ــ برای اینکه زمان مورد بحث روشن شود دوران زندگی بعضی از ریاضی دانان مشهور مشرق زمین را ذکرمیکنیم ؛ از هندیها : آریابهاتا Aryabhata متولد حدود سال ۴۷۶ ؛ براهماگوپتا Brahmagupta حدود سال ۵۹۸ ــ ۶۶۰؛بهاسکارا Bhascara قرن دوازدهم ؛ ازخوارزمیها:الخوارزمی قرن‌نهم ، البیرونی۹۷۳ ــ ۱۰۴۸ نصیرالدین طوسی که درآذربایجان کارمیکرد ۱۲۰۱ــ ۱۲۷۴ ، غیاث الدین جمشید که درثمرقند کارمیکرد قرن پانزدهم .

۲ــ باید درنظر داشت که انتساب پیشرفت عمده ریاضیات آن زمان باعراب صحیح نیست. اصطلاح ریاضیات«عربی» بیشترباین مربوط‌است که بسیاری‌ازدانشمندان مشرق زمین بزبان عربی، که همراه بافتوحات اعراب توسعه یافته بود ، مینوشتند.

متوجه شویم ریاضی‌دانان اروپائی خیلی دیروحتی بعد از آنکه دراروپارنسانس ریاضی شروع شد ، باعداد منفی و گنگ بطورکامل گردن نهادند . مثلا ریاضی دان مشهورفرانسوی ویت Viéte (۱۵۴۰ـ۱۶۰۳) ، که جبر تا حد زیادی مدیون اوست ، اعداد منفی را ندیده میگرفت . ودرانگلستان حتی درقرن هیجدهم هم هنوزاعتراض علیه اعدادمنفی بگوش میرسید: این اعدادپوچ ولاطائل اند زیرا کوچکتراز صفر یعنی «ازهیچ هم کمترند». ولی امروزدیگر اعداد منفی، اگرچه بصورت درجه‌حرارت منفی هم باشد، برای ما عادی شده است : همه مادرروزنامه میخوانیم ومنظور نویسنده را هم می‌فهمیم که مثلا «درجه حرارت فلان شهر ۸ـ درجه است» .

خود کلمه «جبر» هم ازنامگذاری ریاضی دان و منجم خوارزم، محمدبن موسی الخوارزمی که درقرن نهم زندگی میکرد، میآید . تألیف اودرباره جبر «الجبروالمقابله» نامیده میشد که بمعنی «احیاوتقابل» است تحت عنوان احیاءِ (الجبر) ، انتقال اعداد منفی بطرف دیگر معادله و تحت عنوان تقابل (المقابله) ، حذف اجزاءِ مساوی از طرفین معادله فهمیده میشد .

کلمهٔ عربی «الجبر» در زبان لاتین « algebra » ترجمه والمقابله هم حذف شد : باین ترتیب نام algebra بوجودآمد[1].

ضمناً منشاء این نامگذاری بطور کامل بمحتوی خود علم جواب، میدهد . جبر اساساً عبارت ازتعمیم اعمال حساب است. یعنی آنهارا بصورت کلی وجدا ازاعدادمشخص مورد بحث قرار میدهد . هدف اولیه جبر تدوین قوانین صوری مربوط به تبدیل عبارات وحل معادلات میباشد. الخوارزمی عنوان کتابش را درست همان چیزی گذاشت که معرف بعضی قوانین عمومی جبر بود وباین وسیله روح جبررا بیان کرد ..

بعد ها عمرخیام جبررا بعنوان علمی که برای حل معادلات بکار میرود تعریف کرد . این تعریف باهمیت خود باقی بود تا اینکه دراواخر قرن گذشته همراه باتئوری معادلات ، جبربراه تازه‌ای قدم گذاشت واگرچه روح جبربعنوان مطالعه اعمال صوری، حفظ شد ولی سیمای آن بکلی عوض گردید .

ریاضی‌دانان آسیای میانه استخراج ریشه، حل تقریبی یک سلسله معادلات، فرمول کلی «بینم نیوتون» وغیره را پیدا کردند ؛ البته این روابط را بوسیلهٔ جملات بیان می کردند ، نه بوسیلهٔ علامات ؛ علاوه برآن ریاضی دانان آسیای میانه مثلثات راهم خیلی تکامل دادند: آنرامنظم کردند وجداول سینوس را خیلی دقیق محاسبه نمودنداین جداول

۱ــ باید متذکرشد که اصطلاح ریاضی آلگوریتم (Algorithme) که بمعنی متد وقوانین محاسبه است ازخود اسم «الخوارزمی» گرفته شده است .

راریاضی‌دان غیاث‌الدین (حدود سال ۱۴۲۷) برای منجم مشهور ازبك الغ بیگ تنظیم کرد . همین غیاث‌الدین کسرهای اعشاری را ۱۵۰ سال قبل ازاختراع مجدد آنهـا در اروپا ، اختراع کرد .

خلاصه، درجریان قرون وسطی، دستگاه شمار اعشاری کنونی (که شامل کسرها هم هستند) وجبرمقدماتی ومثلثات بطورتقریباً کاملی درهند وآسیای میانه بوجودآمد. درهمین دوره موفقیتهای علوم چینی شروع بنفوذ در کشورهای مجاور کرد ، دانشمندان چین درقرن ششم راه حل معادلات ساده ، محاسبات تقریبی درهندسه ونخستین راه حل تقریبی معادله درجه سوم را میدانستند . قرن ۱٦، ازمواد دوره دبیرستانی امروز جبر چیزی جزلگاریتم واعداد موهومی کم نداشت. علاوه برآن سیستم علامتگذاری حرفی هم هنوزوجود نداشت : محتوی جبرازشکل وفرم‌آن جـلو افتاده بود دیگر این فرم لازم نبود : انتزاع ازاعداد مشخص وتنظیم قوانین کلی، مستلزم روش بیانی که متناسب باآن باشد ، بود . لازم بود که برای اعداد **دلخواه** و اعمال مربوط به آنها علاماتی بوجودآید . استعاری بودن symbolisme جبرهمان شکل لازمی بود که بمحتوی آن جواب میداد ، همانطور کـه در دنیای باستان برای عمل کردن با اعداد صحیح ، لازم بود که علاماتی برای‌آنها درنظر گرفته شود، همانطورهم حالا برای عمل کردن با اعداد دلخواه بطور کلی و پیدا کردن قوانین کلی‌آنهالازم بود که علامات متناسبی‌درنظر گرفته شود . حل این مسئله ازهمان زمان یونانیها شروع شد ولی تنها درقرن هفدهم وقتی که بالاخره دراثر کوششهای دکارت سیستم کنونی علامتگذاریها بوجودآمد،بپایان رسید .

۴ـ دردوره رنسانس علم، اروپائیان نزداعراب تحصیل میکردند و ازراه ترجمه های عربی باعلم یونانی آشنا میشدند ؛ کتابهای اقلیدس ، بطلمیوس و الخوارزمی برای نخستین باردرقرن دوازدهم ازعربی بلاتین که زبان عمومی علمی آنوقت دراروپای غربی بود ترجمه شد . درهمین زمان مبارزه‌ای که در اروپا بین سیستم قبلی عدد شماری (که ازیونانیها و رومیها باقیمانده بود) وعدد شماری هندی (که از اعراب اقتباس شده بود) بتدریج سیستم عدد شماری هندی پیروزشد .

تنها در قرن ۱٦ بود که علم اروپائی توانست بالاخره از موفقیتهای اسلاف خود تجاوز کند. مثلا تارتا **گلیا** Nicolas Tartaglia و فراری Louis Ferrari که هردو ایتالیائی بودند ، اولی معادله درجهٔ سوم ودومی معادله درجهٔ چهارم را بصورت کلی حل کردند (فصل چهارم را به‌بینید) (باید تذکرداد که اگرچه این نتیجه گیریها جزوبرنامه مدارس نیست ولی بعلت نوع روشهائیکه‌بکارمیبرند مربوط بریاضیات

مقدماتی هستند ، درجبرعالی تئوری عمومی معادلات مورد بحث قرارمیگیرد).

درهمین دوره برای نخستین‌بارشروع بعمل با اعداد موهومی کردند (در آنموقع عمل با اعداد موهومی صرفاً صوری بود وهیچگونه پایه واقعی نداشت ، پایه واقعی اعداد موهومی خیلی دیرتر و در ابتدای قرن ۱۹ روشن‌شد) . همچنین علامات جبری کنونی فراهم شد و بخصوص (بوسیلهٔ ویت Viète درسال ۱۵۹۱) نه تنها برای مجهولات بلکه برای اعداد مفروض هم علامات حرفی «a» و «b» وغیره درنظر گرفته شد. دراین کوششی که‌برای تکامل‌جبر انجام‌میگرفت عده زیادی ازریاضی دانان‌شرکت داشتند ، ضمناً درهمین دوره کسرهای اعشاری هم دراروپا بوجودآمد (آنها را دانشمند هلندی ستون Stevin اختراع کرد و درسال ۱۵۸۵ برشته تحریر کشید).

بالاخره نپرNéper درانگلستان لگاریتم را بعنوان وسیله‌ای برای محاسبات نجومی اختراع کرد ودرسال ۱۶۱۴ آنراارائه داد وبریگ Henri _ Briggs نخستین جداول لگاریتم اعشاری را درسال ۱۶۲۴ تنظیم کرد[۱].

درهمانموقع دراروپا «تئوری‌اتحادها» وفرمول کلی «بینم نیوتون»[۲] بوجودآمد ، تصاعدهاهم که قبلا روشن شده بود . باین ترتیب ساختمان جبرمقدماتی بپایان میرسید وهمراه باآن درابتدای قرن هفدهم دوره ریاضیات مقادیرثابت و ریاضیات مقدماتی، که اکنون درمدارس باکم وبیش اضافاتی تدریس‌می‌شود ، خاتمه مییافت : دیگراستخوان بندی حساب ، هندسهٔ مقدماتی ، مثلثات وجبرمقدماتی بوجود آمده بود .

ولی نباید گمان کرد که تکامل‌ریاضیات مقدماتی بهمین جا پایان میپذیرد، این تکامل ادامه مییابد ومثلا درهندسهٔ مقدماتی نتایج جدیدی بدست‌آمده و بازهم بدست خواهد آمد . بالاتر از آن مخصوصاً بکمك تکامل بعدی ریاضیات بود که ماتوانستیم ماهیت ریاضیات مقدماتی را روشن‌تردرك کنیم . ولی درریاضیات دیگرنقش‌اساسی بعهده

۱ــ جالب‌است متذکرشویم که نپرلگارتیم رابطریقی که امروز تعریف میکنند (دررابطه $x=a^y$ ، عدد y عبارتست ازلگارتیم x درپایه a) تعریف نمیکرد . تعریف امروزی لگارتیم بعدها داده‌شد. تعریف نپر بمفاهیم متغیروبی نهایت‌کوچك ها مربوط است وباینجا منجرمی‌شود که لگارتیم x عبارتست از تابعی مثل $y=f(x)$ که سرعت‌نمو آن متناسب باعکس x باشد یعنی $y=\frac{c}{x}$ (فصل دوم را به‌ببینید) . بنابراین با وجودیکه هنوزدیفرانسیل اختراع نشده بود ، این تعریف برپایهٔ معادلات‌دیفرانسیلی قرارداشت.

۲ــ این فرمول باین علت بنام نیوتون نامیده نمیشود که‌آنرا برای نخستین‌بار او کشف کرد ، بلکه باین علت است که نیوتون‌آنرا تعمیم داده قوه n را برای اعداد کسری و گنگ هم بکاربرد .

مفاهیم متغیر، تابع وحد بود . حالا هم مسائلی ازریاضیات مقدماتی وجود دارد که نه فقط باکمك مفاهیم ریاضیات عالی وروشهای مربوط بآن‌حل وروشن میشود بلکه غالباً باروشهای ریاضیات مقدماتی اصولاغیرقابل حل است. امروزهم مسائل ریاضیات مقدماتی درارتباط بامفاهیم وروشهای ریاضیات عالی منبع بسیاری ازنتایج و حتی تئوریهای کلی هستند . امثله مربوط به‌تئوری دستگاه منظم اشکال وتئوری اعداد ، اگرچه ازلحاظ فرم مربوط برریاضیات مقدماتی هستند ولی نه روش ونه حل آنها مقدماتی نیست وبحث مفصل درباره آنهارا خواننده درفصل دهم خواهد دید.

۶

ریاضیات کمیات متغیر

۱- درقرن ۱۶ بررسی حرکت درمرکزتوجه علوم طبیعی قرارداشت. احتیاجات عملی وتکامل علوم طبیعی، این علوم را درآستانه بررسی حرکت، بررسی انواع مختلف تغییر وبررسی ارتباط بین کمیات متغیرقرار داد.

مفاهیم متغیر و تابع بعنوان انعکاسی ازخواص عمومی کمیات متغیر وروابط بین آنها، در ریاضیات بوجودآمد و این توسعه موضوع ریاضیات برای انتقال بدوره جدید یعنی دوره کمیات متغیر نقش تعیین کننده داشت.

قانون حرکت جسم روی مسیرمفروض و مثلا روی خط مستقیم، ازروی مسافتی که نسبت بزمان طی میکند معین میشود.

مثلاً گالیله Galilée (۱۵۶۴-۱۶۴۲) قانون سقوط اجسام را کشف کرد وثابت کرد که مسافت پیموده شده بوسیله جسمی که سقوط میکند متناسب با مجذور زمان است. این بیان بوسیله فرمول زیرنشان داده میشود:

$$S = \frac{g \cdot t^{۲}}{۲} \qquad (۱)$$

(که درآن $g \# ۹٫۸۱\ M/sec^{۲}$).

بطورکلی قانون حرکت، مسافت طی شده را بر حسب زمان t میدهد. در اینجا زمان t ومسافت S دومتغیرند: «مستقل» و «وابسته» واینکه هرمقدار t متناظر بامسافت معینی از S است باین معنی است که مسافت S تابعی ازمتغیر t است.

مفهوم ریاضی متغیروتابع چیزی جزتعمیم انتزاعی مقادیرمتغیرمشخص (همچون زمان، مسافت، سرعت، زاویه دوران، سطح جاروب شده وغیره) وروابط مشخص بین آنها (مثل رابطه بین مسافت طی شده بازمان وغیره) نیست. همانطور که عدد حقیقی

شکل انتزاعی اندازه کمیت‌است، همانطور هم «متغیر» شکل انتزاعی کمیت‌تغییر کننده است، کمیتی که الزاماً مقادیرمختلفی را قبول میکند : کمیت متغیر ریاضی عبارتست از«چیزی» یابهتر بگوئیم «چیزدلخواهی» که میتواند مقادیرعددی مختلف‌را قبول کند. بنابراین متغیرریاضی یك متغیر بطور کلی است که زیر عنوان آن میتوان هم زمان، هم مسافت وهم هر کمیت دیگری را فهمید .

بهمین ترتیب تابع عبارتست ازشکل انتزاعی ارتباط یك کمیت باکمیت دیگر. این مطلب که y تابعی است از x ، در ریاضیات تنها این معنی را میدهد که بازاء هرمقدار x ، مقدار متناظر معینی برای y وجود دارد (مفهوم تابع هم بمعنی خود ارتباط متقابل و هم بمعنی قانون ارتباط متقابل کمیت y باکمیت x میباشد) ، مثلا طبق قانون سقوط اجسام ، مسافتی که‌جسم ساقط شونده در زمان معینی طی میکند از روی فرمول (۱) بدست‌میآید : مسافت تابعی‌است اززمان .

انرژی یك‌جسم متحرك برحسب‌جرم و سرعت‌آن طبق‌فرمول‌زیر تعیین‌میشود :

$$E = \frac{m \cdot v^2}{2} \qquad (۲)$$

برای یك جسم مفروض ، انرژی E آن تابعی است ازسرعت v آن .

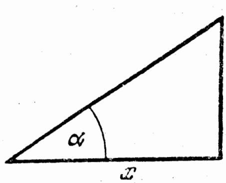
طبق قانون معروف ، مقدار حرارتی که ضمن عبور جریان الکتریسیته درواحد زمان ایجاد میشود از روی فرمول زیربدست میآید :

$$Q = \frac{R \cdot I^2}{2} \qquad (۳)$$

که درآن I شدت جریان و R مقاومت سیمی است که جریان الکتریسیته از آن عبور میکند . برای مقاومت مفروض ، هرشدت جریان I متناظر است بامقدار معینی ازحرارت Q که در واحد زمان بدست‌آمده است . بنابراین Q تابعی است از I .

سطح S مثلث قائم الزاویه ای که یکی اززوایای حاده اش α وضلع مجاوربآن x باشد (ش۵) بوسیله فرمول زیربیان میشود :

$$S = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{tg} \alpha \qquad (۴)$$



ش ۵

اگر زاویهٔ α مفروض باشد ، سطح مثلث تابعی ازضلع x خواهد بود .

همه فرمولهای (۱) تا (۴) را میتوان دریك فرمول متحد کرد :

$$y = \frac{۱}{۲} a x^{۲} \qquad (۵)$$

اینهم انتقال از کمیات متغیر مشخص t،S،E،Q،v و غیره بمتغیرهای کلی xوy ، انتقال از روابط مشخص (۱) و (۲) و (۳) و (٤) بصورت کلی آنها یعنی رابطه (۵) است . اگرمکانیك و الکتریسیته بافرمولهای مشخص (۱) و (۲) و (۳) کهمربوط به کمیات مشخصی هستند سر وکاردارد ، علم ریاضی توابع ، بافرمول کلی(۵)، فرمولی که بهیچ کمیت مشخصی مربوط نیست ، سروکاردارد .

درجه بعدی انتزاع ازموارد مشخص، آنست که بین xوy رابطه مشخصی مثل $y = \frac{۱}{۲} a x^{۲}$ ، $y = \sin x$ ، $y = \log x$ وغیره درنظرنگیریم، بلکه رابطه‌تابعی xوy را بطور کلی ، رابطه ایکه بوسیلهٔ فرمول انتزاعی زیر بیان میشود مورد بررسی قرار دهیم :

$$y = f(x)$$

این فرمول حاکی ازآنست که مقدار y بطور کلی **تابعی** از x است ، یعنی هرمقدار معینی از x **بنحوی** متناظربامقدار معینی از y است . موضوع بر سراین و یا آن‌تابع مفروض ($y = \frac{۱}{۲} a x^{۲}$ ، $y = \sin x$ وغیره) نیست ، بلکه برسرتوابع **دلخواه** (یا دقیق تربگوئیم : کم وبیش دلخواه) میباشد .

این درجات انتزاع : ابتدا انتزاغ از مقادیرمشخص و سپس انتزاع از توابع مشخص، شبیه بدرجات انتزاعی‌است کهضمن تشکیل مفهوم عدد صحیح انجام میگرفت ابتدا انتزاع ازمجموعه اشیاء مشخص و بوجودآمدن مفهوم اعداد جداگانه (۱و۳و۱۲ وغیره) وسپس‌انتزاع ازاعداد مشخص جداگانه که منتهی بمفهوم عدد صحیح بطور کلی میشود ، این‌تعمیم نتیجه تحلیل analyse وترکیب synthèse عمیقی است کهمتقابلا انجام میگیرد ، یعنی تحلیل روابط جداگانه ازیکطرف و ترکیب خطوط کلی نتایج حاصله بصورت مفاهیم جدید ، ازطرف دیگر .

رشته‌ای ازریاضیات که خاص مطالعه توابع است آنالیز،آنالیزریاضی ویا (آنطور که غالباً نامیده میشود) آنالیزبی‌نهایت کوچکها نامیده میشود . نامگذاری اخیربدین علت است کـه مفهوم مقادیر بی‌نهایت کوچك بعنوان وسیله مهمی برای مطالعه توابع بکارمیرود(محتوی مفهوم مقادیربی‌نهایت کوچك واهمیت آن درفصل دوم روشن‌میشود).

ازآنجـا که تابع شکل انتزاعی رابطه یك کمیت باکمیت دیگراست ، میتوان

گفت که موضوع آنالیز عبارتست از ارتباط بین کمیات متغیر، ولی نه ارتباطی که بین این وآن کمیت مشخص وجود دارد ، بلکه رابطه بین متغیرها بطور کلی ، متغیرهائی که از هر گونه مضمون و محتوی جدا شده باشد . یك چنین انتزاعی وسعت کاربرد آنالیزرا تأمین میکند ، زیرا یك فرمول و یا یك قضیه حالات ممکنه بسیارزیادی‌رادر برمیگیرد. بعنوان مثال میتوان فرمولهای ساده (۱) تا (۵) را نام برد . دراینجاشباهت کاملی بین‌آنالیز باحساب وجبردیده می‌شود : همه آنها ازمسائل معین پراتیك بوجود آمده و روابط کمی حقیقی واقعیت را بشکل کلی وبصورت انتزاعی منعکس میکنند .

۲ـ بنابراین دوره جدید ریاضیات ، یعنی دوره ریاضیات کمیات متغیررا که ازقرن هفدهم شروع میشود میتوان بعنوان دوره ظهوروتکامل آنالیزدانست (این سومین دوره بزرگ تکامل ریاضیات است که قبلا ذکر کردیم) . ولی روشن است که هیچ نظریه ای تنها باتشکیل مفاهیم جدید بوجود نمیآید ، آنالیزهم نمیتوانست ازمفاهیم متغیروتابع بوجودآید . برای بوجودآمدن تئوری ، وازآن بالاتر برای بوجود آمدن یك رشته‌کامل علمی که‌آنالیزریاضی یکی از آنهاست ، بایستی مفاهیم جدید باصطلاح وارد عمل‌شده وبکمك‌آنها روابط جدیدی کشف ومسائل جدیدی را حل نمایند. بعلاوه وجود مفاهیم‌جدید ، تنها برپایه مسائلی که بوسیله این مفاهیم حل میشود و تنهابرپایه قضایائی که ازاین‌مفاهیم استفاده میکنند ، بوجود میآید ، تکامل پیدا میکند ، دقیق میشود و تعمیم مییابد . مفاهیم متغیروتابع بصورت حاضروآماده و دفعتاً برای گالیله ، دکارت،نیوتون و یاهر کس دیگربوجود نیامد ، بلکه برای عده زیادی ازریاضی دانان مطرح بود (و مثلا برای نپردر ارتباط بالگارتیم) سپس نیوتون و لایپ‌نیز Leibniz شکل کم وبیش روشنی بآنها دادند ولی این شکل هنوز قطعی نبود و بعد ها با تکامل آنالیزتعمیم یافت ودقیق‌ترشد . تعریف کنونی این مفاهیم تنها در قرن ۱۹ داده شد ، ولی این تعریف هم **مطلقاً** دقیق و **کاملا** قطعی نیست ، تکامل مفهوم تابع در زمان ماهم ادامه دارد .

آنالیزریاضی برپایه مواد اولیه ای که بوسیله مکانیك مطرح شده بود و برپایه مسائل هندسه و روشها ومسائلی که ناشی ازجبربود ، بوجودآمد .

نخستین قدم تعیین کننده دربوجودآمدن ریاضیات کمیات متغیر با ظهور کتاب «هندسه» دکارت درسال ۱۶۳۷ برداشته شد . در این کتاب پایه های علمی که «هندسه تحلیلی» نامیده میشودگذاشته شده بود . ایده‌های اساسی دکارت چنین است :

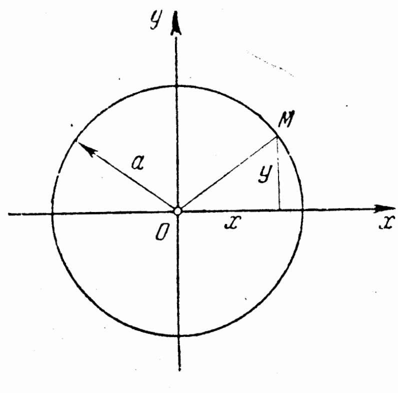
فرض کنید مثلا معادله زیررا داشته باشیم :

$$x^2+y^2=a^2 \qquad (٦)$$

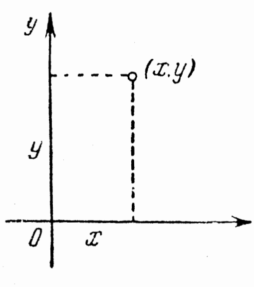
درجبر x و y بعنوان مجهول شناخته میشد و ازآنجا که با معادله (٦) نمیتوان این مجهولات را معین کرد، چنین معادلهای برای جبرجالب نبود. دکارت x و y رانه بعنوان مجهولاتی که بایدآنهارا بکمك این معادله بدستآورد، بلکه بعنوان **متغیر**-هائی که این معادله رابطه بین آنها را بیان میکند مورد بررسی قرار می دهد. چنین معادلهای را میتوان با انتقال تمام جملاتآن بسمت چپ بصورت کلی زیر نوشت:

$$F(x,y)=0$$

سپس دکارت مختصات x و y را که امروزکارتزین[Cartésien = دکارتی] نامیده میشود روی صفحه وارد کرد (ش٦) بطوریکهباهر دومقدار x و y نقطهای مشخص میشود وهر نقطه ای متناظر بامختصاتی از x و y است. باینترتیب معادله $F(x,y)=0$ مکان هندسی نقاطی را روی صفحه معین میکند که مختصات آنها دراین معادله صدق کند. این مکان بطورکلی یك خط خواهد بود. مثلا معادله (٦) دایرهای بشعاع a و بمرکز



ش٧



ش٦

مبداء مختصات را معین میکند. درحقیقت همانطورکه ازشکل ۷ دیده می شود طبق قضیه فیثاغورث x^2+y^2 مساوی بامجذور فاصله O تا M (بمختصات x و y) است. بنابراین معادله(٦) مکان هندسی نقاطی را معینمیکند که فاصلهآنها ازمبداء مختصات مساوی a باشد: یعنی دایره.

برعکس: مکان هندسی نقاطی را که بوسیله یك شرط هندسی معین شده است میتوانبوسیله معادلهای که همین شرط را با زبان جبر و بکمك مختصات بیان میکند نشان داد. مثلا مکان هندسی نقاطی که از نقطه مفروض بیك فاصله باشند بزبان جبر بوسیله معادله (٦) بیان میشود.

بنابراین روش وموضوع کلی هندسه تحلیلی را میتوان بطریق زیر بیان کرد : این و یاآن معادله‌ایکه دومتغیردارد بوسیله یك خط روی صفحه نشان داده و خواص **هندسی** خط مزبوررا بوسیله خواص **جبری** معادله‌آن جستجو کنیم و برعکس : بوسیلهٔ شرایط هندسی یك خط ، معادله‌آنرا پیدا کرده وسپس دوباره باکمك خواص جبری معادله، خواص‌هندسی‌آنرا جستجو کنیم . باین‌طریق میتوان‌مسائل هندسی‌رابر پایه جبروبالاخره برپایه محاسبه حل‌نمود .

محتوی اسلوب هندسه تحلیلی بطور مفصل درفصل سوم روشن خواهد شد ولی همانطورکه ازبیان‌مختصرما پیداست می‌خواهیم توجه‌را باین‌نکته‌معطوف کنیم که‌ایده کلی کمیات متغیر وتلفیق جبروهندسه منبع این اسلوب‌است. تئوری مقاطع مخروطی محتوی‌اصلی هندسی فصول‌اولیه هندسه‌تحلیلی‌راتشکیل‌میدهد (بیضی،هذلولی،سهمی).

همانطورکه متذکرشدیم این تئوری در دوران باستان هم تکامل پیداکرده بود نتیجه‌گیریهای آپولونیوس Appollonius شامل معادلات مقاطع مخروطی (منتهی بشکل هندسی) هم بود . تلفیق این محتوی هندسی باصورت Forme جبری(که با تکامل ریاضیات بعد از یونانیها انجام‌گرفت) وبا ایده‌کلی کمیت متغیر(که ضمن‌مطالعه حرکت بوجودآمد) هندسه تحلیلی را بوجودآورد .

اگرمقاطع‌مخروطی برای یونانیها موضوع صرفاً ریاضی بود ، در زمان دکارت مطالعه این مقاطع مقادیری راکه‌برای نجوم، مکانیك وتکنیك لازم بود بدست‌میداد، کپلر Képler (۱۵۷۱ - ۱۶۳۰) کشف کرد که سیارات روی مدار بیضی بدور خورشید حرکت میکنند و گالیله Galilée ثابت‌کرد جسمی‌که پرتاب شود خواه سنك باشد یاگلوله توپ بشکل‌سهمی‌پروازمیکند (اگربتوانیم درتقریب اول‌ازمقاومت هوا صرفنظر کنیم) . توجه بمطالب گوناگونیکه منجر بمقاطع مخروطی میشد آنرا بعنوان یکی ازضروریات مبرم معرفی‌کرد و اسلوب دکارت بخصوص همین مسئله مبرم را حل نمود . خلاصه هندسهٔ تحلیلی بوسیله تکامل قبلی ریاضیات تدارك دیده شد و بوسیله احتیاجات رسیده و پخته علم وتکنیك بزندگی فرا خوانده شد .

۳ـ قدم تعیین کنندهٔ بعدی در ریاضیات کمیات متغیر، با بوجودآمدن حساب دیفرانسیل و انتگرال و بوسیله نیوتون‌ولایب نیزدرنیمه دوم قرن هفدهم برداشته شد. این دیگر بوجودآمدن واقعی‌آنالیزبود - زیرا برخلاف هندسه تحلیلی‌که موضوع‌آن در هر صورت اشکال هندسی است ، موضوع حساب دیفرانسیل و انتگرال Calcul différentiel et intégral عبارت‌ازخواص خودتابع‌است . درحقیقت نیوتون ولایب‌نیز کار عظیم تدارك‌را بپایان رساندند، کاریکه عده زیادی از ریاضی دانان در آن شرکت

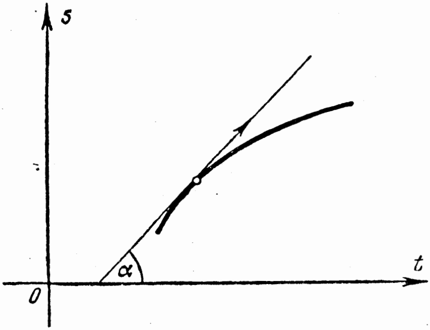
داشته و آغاز آن از زمانیکه یونانیهای قدیم دنبال طرحی برای تعیین سطح وحجم میگشتند شروع شده بود .

ما در اینجا محتوی مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال وتئوری آنالیز را که پس از آن بوجود آمد ، شرح نخواهیم داد . این شرح در فصولی که مربوط باین تئوریهاست داده خواهد شد . ما تنها میخواهیم که نظرها را متوجه سرچشمه‌های حساب دیفرانسیل وانتگرال بنمائیم ، سرچشمه‌هائیکه مسائل جدید مکانیك و مسائل قدیمی هندسه، مسائل مربوط برسم مماس بر منحنی وتعیین سطوح واحجام، عمده‌ترین آنها هستند و از همان دوران باستان دانشمندان ریاضی را بخود مشغول کرده بود (کافی است که ارشمیدس Archimède را بخاطر بیاوریم) ؛ در قرن ۱۷ نیز عده زیادی از ریاضی دانان مانند کپلر Képler ، کاوالیری Cavalieri و دیگران سرگرم حل این مسائل بودند . ولی چیزی که دراینمورد تعیین کننده بود ، کشف ارتباط این دو نوع مسائل و فرموله کردن اسلوب کلی حل آنها بود و این افتخار نصیب نیوتون و لایب نیز شد .

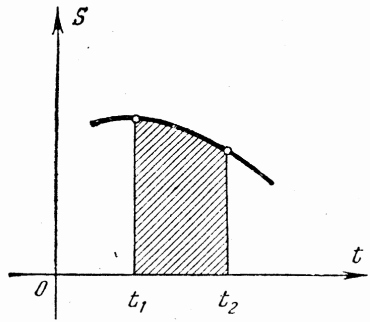
پایه این کشف یعنی کشف رابطه بین مسائل مکانیك وهندسه را باید در روش مختصات دانست، روشی که اجازه میدهد رابطه یك کمیت را با کمیت دیگر بوسیله منحنی نشان داد، یعنی اسلوبی که امکان نمایش هندسی تابع را بدست میدهد. وقتیکه بتوانیم منحنی یك تابع را نمایش دهیم بسادگی خواهیم توانست ارتباط بین مسائل مکانیك و هندسه را نشان دهیم ، ارتباطی که منبع حساب دیفرانسیل و انتگرال است و محتوی این حساب هم در آن وجود دارد .

حساب دیفرانسیل در اساس عبارتست از روش پیدا کردن سرعت حرکت در لحظه دلخواهی از زمان ، بشرطی کـه رابطه بین مسافت و زمان معلوم باشد . این مسئله بوسیله « دیفرانسیل گیری » حل میشود ومعادل بامسئله رسم مماس بر منحنی است که نمایش تغییرات مسافت را نسبت بزمان میدهد: سرعت درلحظه t برابر است باتانژانت زاویه انحناء (ضریب زاویه) مماس بر منحنی در نقطه‌ای که بازاء t بدست آمده باشد (ش۸) ،

حساب انتگرال دراساس عبارتست از روش پیدا کردن مسافت پیموده شده بشرطی که رابطه بین سرعت و زمان معلوم باشد (یابطورکلی، پیدا کردن مقدار مجموع عمل یك کمیت متغیر). واضح است که این مسئله عکس دیفرانسیل گیری یعنی مسئله یافتن سرعت است وبوسیله «انتگرال گیری» integration حل میشود وکاملا معادل بامسئله پیدا کردن سطح زیر منحنی است که از نمایش تغییرات سرعت نسبت بزمان بدست آمده باشد .



ش۸



ش۹

مسافت پیموده شده درفاصلهٔ زمانی ازلحظه t_1 تا t_2 برابر است باسطحی که زیر منحنی نمایش تغییرات سرعت بوده وبعرضهای نقاطی ازمنحنی که متناظر بامقادیر t_1 و t_2 است محدود باشد (ش۹) . کافی است که مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال را از مکانیك جدا کنیم وبطورکلی درباره توابع، ونه درباره ارتباط مسافت یا سرعت بازمان ، صحبت نمائیم ، تادرآنصورت مفهومی‌کلی درباره مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال ، بصورت خالص، بدست آوریم .

صرفنظر ازمفاهیم متغیروتابع ، بعدها مفهوم حد هم بیکی ازپایه های حساب دیفرانسیل و انتگرال وهم بیکی ازپایه‌های آنالیز (ضمن توسعه بعدی‌آن) تبدیل‌شد. در دوره‌ایکه آنالیزشکل میگرفت، بجای کلمهٔآنالیز مقادیربی نهایت کوچك را که در آنزمان هنوز دارای ابهاماتی بود ، بکارمیبردند . شیوه محاسبه سرعت از روی قانون تغییرمسافت(دیفرانسیل گیری) ومحاسبه مسافت ازروی‌سرعت (انتگرال گیری) برپایه استفاده از جبر (وباتوجه بمفهوم حد) قراردارد . آنالیز در نتیجه تجمع این مفاهیم و مسائل ذکرشده مربوط بمکانیك وهندسه و بعضی مسائل دیگر (مثلا مسائل مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم) بوجودآمد . آنالیزبرای تکامل مکانیك فوق العاده ضروری بود و اصولامفهوم آنالیزدرخودفرمول‌بندی قوانین مکانیك (اگرچه بطورمخفی‌هم بود) وجود داشت . قانون دوم نیوتون اززبان خود نیوتون میگوید که:«تغییرمقدارحرکت‌متناسب بانیروی موثر است» . دقیق‌تر: سرعت تغییرمقدارحرکت متناسب بانیروست. بنابراین برای استفاده از این قانون بایستی بتوان سرعت تغییر یك کمیت را معین کرد یعنی دیفرانسیل گرفت. اگرهمین قانون‌را فرموله کرده وبگوئیم که شتاب متناسب‌بانیروست بازهم مسئله بقوت خود باقی میماند ، زیرا شتاب چیزی جزسرعت تغییرسرعت نیست.

خودبخود روشن است که برای تعیین قانون حرکتی که در اثر نیروی متغیری بوجود آمده ویابطور کلی حرکتی که باشتاب متغیر مفروضی بوجود آمده باید مسئله عکس را حل نمود: باید خود کمیت را از روی‌سرعت تغییرش پیدا کرد یعنی باید انتگرال گرفت میتوان گفت که نیوتون برای‌اینکه‌بتواند مکانیك را تکامل بدهد **ناچار بود** که دیفرانسیل گیری وانتگرال گیری را کشف کند.

۴ـ همراه باحساب دیفرانسیل وانتگرال رشته‌های دیگری هم درآنالیزبوجود آمد: تئوری سریها (فصل دوم را به‌بینید)، تئوری معادلات دیفرانسیل (فصول۵و۶)، بکاربردن‌آنالیز درهندسه(که بعدها برشته خاصی ازهندسه تبدیل‌شد)، تئوری عمومی خطوط وسطوح منحنی بنام هندسه دیفرانسیل (فصل۷) و همه این تئوریها هم بوسیله مسائل مکانیك، فیزیك وتکنیك بوجودآمد وتکامل پیدا کرد.

تئوری معادلات دیفرانسیل (یعنی مهمترین رشته‌آنالیز) بامعادلاتی سروکار دارد که مجهول آنها یك کمیت نیست، بلکه یك تابع است، یعنی منظور ازحل معادلـه دیفرانسیل یافتن‌قانون ارتباط یك کمیت با کمیت یا کمیات دیگراست، بسادگی‌میتوان فهمید که اینگونه مسائل ازکجا بوجود میآید: در مکانیك باید قانون حرکت جسم را درشرایط مفروض معین کرد نه مقدار مشخصی برای سرعت ویامسافت. درمکانیك مایعات باید انتشارسرعت رادرتمام مایعی که درحال جریان‌است یعنی ارتباط بین‌سرعت بازمان وهرسه بعد فضا را پیدا کرد. بهمین ترتیب در تئوری الکتریسیته و مغناطیس باید فشارمیدان را درتمام فضا یعنی رابطه این فشار را با سه بعد فضا پیدا کرد و غیره.

ازاین نوع مسائل دائماً درمکانیك (که شامل هیدرو دینامیك و تئوری قابلیت ارتجاع هم میشود) و در علم الاصوات و در تئوری الکتریسیته و مغناطیس و در تئوری گرما بوجود میآمد. بطورکلی، آنالیز از همان لحظه بوجودآمدنش در ارتباط کامل با پیشرفت مکانیك و بطورکلی فیزیك تکامل پیدا کرد و بزرگترین موفقیتهای آنالیز همیشه بحل مسائلی‌مربوط بوده‌است که بوسیلهٔ این علوم مطرح میشده است. اززمان نیوتون،بزرگترین دانشمندان آنالیز یعنی برنولی D. Bernoulli (۱۷۰۰ـ۱۷۸۲) اولر Léonard _ Euler (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳)لاگرانژJoseph—Louis—Lagrange (۱۷۳۶ـ۱۸۱۳)پوانکاره Henri_Poincaré (۱۸۵٤ـ۱۹۱۲)، م.و.استروگرادسکی Ostrogradski (۱۸۰۱ـ۱۸۶۱)، آ.م. لیاپونوف Lyapounof (۱۸۵۷ـ۱۹۱۸) و عده زیاد دیگری درآثارخودشان بخاطرمسائل حیاتی که درعلوم دقیقه طبیعی زمانشان مطرح شده بود راههای جدیدی درآنالیز گشودند.

تئوریهای جدید باین ترتیب بوجود آمد : اولرولاگرانژ در ارتباط مستقیم با مکانیك رشته جدید آنالیز را بنام حساب واریانس Calcul de variance (فصل ۸) ودر اواخرقرن نوزده پوانکاره ولیاپونوف تئوری کمی معادلات دیفرانسیل را ، که آنهم از مسائل مکانیك سرچشمه میگرفت ، بوجود آوردند (فصل ۵)

درقرن ۱۹ آنالیز بوسیله رشته مهم جدیدی بنام تئوری توابع متغیرمختلط غنی تر شد (فصل نهم) نطفه‌های این تئوری درآثاراولروبعضی ریاضی دانان دیگروجود داشت ودر اواسط قرن ۱۹ بود که بصورت یك تئوری دقیق تنظیم شد وانجام گرفتن این عمل تاحد زیادی به کوشی Cauchy ریاضی دان فرانسوی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) مربوط میباشد این تئوری بعلت غنای محتویش و بعلت نفوذ عمیقی کـه در یك سلسله قوانین آنالیز کرد وبرای حل مسائل مهم ریاضی وفیزیك وتکنیك مورد استفاده پیدا کرد، بسرعت روبتکامل رفت و اهمیت بسیار بدست آورد .

آنالیز که باسرعت وشدت تکامل مییافت نه فقط درمرکزریاضی قرار گرفت و بصورت قسمت عمده‌ای ازآن درآمد بلکه درقدیمی‌ترین رشته‌های ریاضی، یعنی جبر، هندسه و حتی تئوری اعداد هم نفوذ کرد . ازاین ببعد جبررا اساساً بعنوان علم توابع، توابعی بصورت کثیرالجمله‌هائی ازیك یاچند متغیر ، می‌فهمیدند-۱- درمبحث هندسه هم ، هندسه تحلیلی و هندسه دیفرانسیل مسلطشد ؛ بالاخره اولر اسلوب آنالیزرا در تئوری تحلیلی اعداد وارد کردومبنای تئوری‌تحلیلی‌اعداد را گذاشت که تکامل آن باعث موفقیتهای عظیمی در علم مربوط به اعداد شد .

ازراه آنالیز و مفاهیم متغیر، تابع وحد ، ایده حرکت وتغییر وبنابراین منطق فلسفه علمی dialectique بهمه‌ریاضیات نفوذ کرد . درست بهمین ترتیب، ریاضیات اساساً ازطریق آنالیز تحت تأثیرعلوم طبیعی وتکنیك قرار گرفت وخود ریاضی بعنوان اسلوب فرموله کردن دقیق قوانین و راه‌حل مسائل‌علوم طبیعی، درتکامل آنها شرکت کرد .

---

۱ ـ توابعی هستند که مثلا بصورت $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ باشند ، مسئله اساسی جبراین دوره حل معادله $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ بود ، یعنی برای x باید مقداری پیدا کرد که بازاء آن تابع $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ مساوی صفر شود خود این مطلب که چنین معادله‌ای دارای ریشه میباشد ، یعنی قضیه اساسی جبر، بوسیله آنالیزثابت میشود (فصل ٤ را به بینید) .

همانطور که برای یونانیها ، ریاضیات اساساً همان هندسه بود ، همانطور هم میتوان گفت که ریاضیات بعد از نیوتون اساساً آنالیز شد . البته، آنالیز همه ریاضیات را بطورکامل درخود فرو نبرد؛ هندسه، تئوری‌اعداد وجبر همیشه مسائل وروشهای مخصوص بخود را حفظ کردند . مثلا در قرن ۱۷ ، همزمان با هندسه تحلیلی فصل دیگری از هندسه بنام هندسه تصویری بوجود آمد که درآن اسلوب صرفاً هندسی تسلط دارد . منشاء هندسه تصویری عبارت‌ازنمایش اشیاء روی صفحه‌است (تصویر) ، هندسه‌تصویری بخصوص در هندسه ترسیمی مورداستفاده دارد .

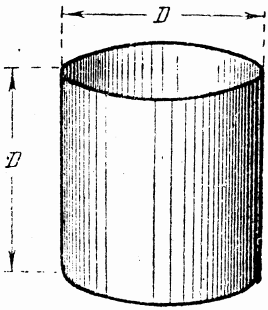
درهمانموقع رشته مهم جدیدی در ریاضیات بنام تئوری احتمالات بوجودآمد . موضوع این‌تئوری عبارتست ازبررسی قوانینی که‌بریك پدیده ضمن‌تکرار متوالی‌ومتعدد آن (مثل يك‌سری تیراندازی ویاپرتاب سکه) حاکم است . تئوری احتمالات دردوران اخیر اهمیت زیادی درفیزيك وتکنيك پیدا کرده است . شکفتگی وپیشرفت این علم هم بمسائلی که ازعلوم طبیعی وتکنيك ناشی شده است وهم به استفاده ازاسلوب‌آنالیز مربوط است ودر این پیشرفت دانشمندان روسی وشوروی نقش موثری داشته‌اند .

ازخصائص ویژه این تئوری آنست که در عین حال که باقوانین «وقایع تصادفی» سروکاردارد، آنچنان اسلوب‌ریاضی بدست‌میدهد که بوسیله‌آن‌میتوان بجستجوی‌ضرورتی که بدنبال این اتفاقات ظاهر میشود ، رفت . اصول تئوری احتمالات را درفصل‌یازدهم روشن خواهیم کرد .

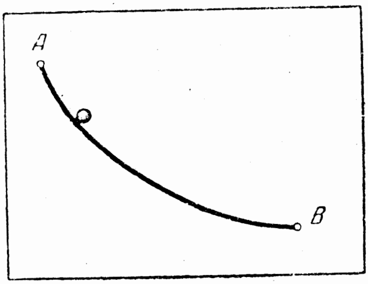
۵ ــ آنالیزورشته های مختلف‌آن روشهای پر قدرتی برای حل مسائل مختلف علوم طبیعی وتکنيك بدست داد ، نخستین آنهارا بخاطر بیاوریم : پیدا کردن سرعت يك کمیت وقتیکه رابطه‌بین‌خود کمیت‌وزمان‌معین‌باشد؛ تعیین‌سطح اشکال منحنی‌الخط و حجم اجسام ؛ تعیین مقدارمجموع يك جریان یا مقدار مجموع يك کمیت متغیر . مثلا حساب انتگرال اجازه میدهد که کارگاز را ضمن انبساط ، وقتی کـه فشار طبق قانون معینی‌تغییرمیکند ، معین کنیم . همچنین طبق قانون کولن Coulomb ، کـه فشار میدان ناشی ازبار نقطه‌ای را [یعنی باری که حجم حامل آن صفر فرض میشود] تعیین کرده‌است ، باکمك حساب انتگرال میتوان فشار میدان الکتریکی که سیستم بارهای آن باندازه‌کافی بغرنج باشد پیدا کرد وغیره .

سپس آنالیز روش‌پیدا کردن مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم را در شرایط مختلف بدست داد . مثلا باکمك آنالیز بسادگی میتوان شکل مخزن استوانه‌ای راکه برای حجم مفروض کمترین‌سطح را داشته‌باشد پیدا کرد و باین ترتیب حداقل‌مصالح را خرج

کرد واین وقتی اتفاق خواهد افتاد که ارتفاع مخزن مساوی قطرقاعده باشد (ش۱۰) .



ش ۱۰



ش ۱۱

بکمك آنالیز میتوان شکل مسیر بین دو نقطه مفروض را پیدا کرد بطوری که جسمی بتواند درمی‌نیمم زمان از ابتدا تا انتهای آن بغلطد (این خطرا سیکلوئید Cycloïde مینامند . ش ۱۱)

خواننده چگونگی‌حل این مسائل و مسائل شبیه آنها را در فصول دوم وهشتم خواهد دید .

آنالیز و یا اگر دقیق‌تر بگوئیم ؛ تئوری معادلات دیفرانسیل نه تنها امکان میدهد که مقادیر ساده و منفرد کمیات متغیررا پیدا کنیم ، بلکه همچنین امکان پیدا کردن تابع مجهول یعنی قانون ارتباط کمیاتی با کمیات دیگر را هم بدست میدهد. مثلا با توجه بقوانین عمومی جریان الکتریسیته میتوانیم رابطه شدت جریان با زمان را در مدار دلخواهی که مقاومت ، ظرفیت و خودالقائی Self Induction آن معین باشد ، بدست بیاوریم . ما میتوانیم قوانین کلی نوسان تارها و پرده‌ها ، قوانین انتشار نوسانات در ملاءِ های مختلف یعنی نوسانات مربوط بامواج صوتی ، امواج الکترو مغناطیسی و امواج دیگری که ضمن زمین لرزه‌ها و انفجارها در زمین منتشرمیشود ، بدست بیاوریم و این مطلب روشهای جدیدی برای کشف معادن و بررسیهای‌زیرزمینی خاکها در اختیار ما میگذارد . خواننده مسائل جداگانه‌ای از این قبیل را درفصول پنجم وششم خواهد دید .

بالاخره ، آنالیز تنها وسیله‌ای برای حل مسائل مختلف نیست ، بلکه در عین حال روشهای‌عمومی بدست‌میدهد که بکمك آنهامیتوانیم قوانین کمی‌علوم دقیقه طبیعی را بشکل ریاضی تدوین کنیم .همانطور که قبلا گفته شدقوانین‌عمومی مکانیك را بدون استفاده از آنالیز نمیتوان بشکل ریاضی تنظیم کرد و بدون این تنظیم هم امکان‌حل

مسائل مکانیك وجودندارد. بهمین ترتیب قوانین کلی انتقال حرارت ، نفوذ Diffusion انتشار نوسانات ، فعل وانفعالات شیمیائی، قوانین اساسی الکترومغناطیس ـ Electro Magnétique و بسیاری دیگر نمیتواند بدون مفهوم آنالیز بشکل ریاضی تنظیم شود . تنها بکمك چنین فرمولهائی است که میتوان اصول کاربرد این قوانین را درموارد مشخص پیدا کرد و در مسائل مختلف مربوط بهدایت حرارت ، نوسانات ، انحلال ، میدان الکترومغناطیسی و در مسائل مربوط بمکانیك ، نجوم ، همه رشته‌های مختلف فیزیك ، شیمی ، تکنیك حرارتی Thermo-technique ، انرژی ، ماشین سازی ، الکتروتکنیك Electro_Technique و غیره و غیره به نتایج ریاضی رسید .

۶ ـ همانطور که در تاریخ هندسه یونان ، در پایان یك راه طولانی تکامل ، بیان دقیق ومنظم هندسه بوسیلهٔ اقلیدس داده شد ، همانطور هم تکامل آنالیز ایجاب میکرد که برشالوده‌ای دقیق‌تر و منظم‌تر از آنچه که مولفین اولیه آن یعنی نیوتون ، اولر، لاگرانژودیگران پایه گذاری کرده‌بودند، گذاشته‌شود .آنالیزی که‌این دانشمندان بوجود آوردند اولا روزبروز شامل مسائل مشکل‌تر و عمیق‌تری میشد و ثانیاً خودحجم مطالب آن نظم بیشتر و اصول و شالوده عمیق‌تر و عقلانی‌تری را طلب میکرد . باین ترتیب پیشرفت کمی تئوری ضرورتاً مسئله تحکیم بیشتر پایه های آن ومنظم کردن و تجزیه و تحلیل انتقادی اصول آنرا مطرح میکند .«تنظیم اصول» در نقطه شروع یك تئوری مطرح نمیشود ، بلکه پس از آنکه تئوری بدرجه معینی از تکامل برسد ، یك چنین تنظیمی ضرورت پیدا میکند . زیرا بدون تئوری اصولا معلوم نیست که اصول چه چیزی را باید تنظیم کرد . همانطور که فیلسوف و جامعه شناس مشهور آلمان در کتابی که علیه «دورینگ» نوشته میگوید : «اصول ، نقطه شروع یك بررسی نیست بلکه به‌عنوان نتیجه نهائی بدست‌میآید. » بعضی ازطرفداران معاصر « اصالت شکل » Les formalistes این‌مطلب را فراموش‌میکنند وترجیح میدهند که تئوری را برپایه اصول آن طرح کرده و حتی تکامل‌دهند بدون اینکه مقدمتاً ازمحتویات واقعی اصول (بدیهیات = Axioms) یعنی چیزی که‌بایستی بوسیلهٔ‌تئوریهاجمع بندی‌شود، سردرآورده باشند . ولی خود اصول احتیاج به‌پایه‌های مضمونی دارد ، آنها تنها بقیه‌مواد اولیه‌ای را که برای شروع ساختمان منطقی تئوری لازم است بدست میدهند [۱] .

۱ ـ این نقش دوگانه اصول متعارفی گاهی حتی در تألیفاتی که جنبه منطق علمی Méthodologie هم دارند ازنظرمیافتد وبااین‌عمل‌اصول متعارفی را بغلط‌بعنوان پایه گذاران مطلق تئوری تلقی میکنند .

وقت انتقاد از آنالیز و منظم کردن و پایه دادن بآن در اواسط قرن گذشته ضرورتاً فرارسید و با کوشش یك عده از دانشمندان برجسته ، این امر مشکل و مهم با موفقیت بپایان رسید وبخصوص تعاریف دقیقی‌از مفاهیم اساسی : عددحقیقی، متغیر، تابع ، حدو اتصال بدست آوردند .

ولی همانطور که قبلا متذکر شدیم هیچیك از این تعاریف را نمیتوان مطلقاً دقیق وکاملا تمام شده دانست . تکامل این مفاهیم ادامه دارد ، اقلیدس و همه‌ریاضی دانان درجریان دو هزارسال بعد ازاو کتاب «مقدمات» اقلیدس را با اطمینان ، تقریباً سرحد دقت منطقی میدانستند ، ولی حالا و با نظریات کنونی، اصول هندسه اقلیدس کاملا سطحی بنظرمیرسد . این نمونه تاریخی بما میآموزد که نباید در باره دقت «مطلق» و «کامل» ریاضیات معاصر مبالغه کرد . در علمی که نمرده وبمومیائی تبدیل نشده است هیچ چیز تمام شده‌ای نیست و نمیتواند باشد . ولی بهرصورت میتوانیم با اطمینان بگوئیم که اولا اصول آنالیز که امروز مورد قبول است بمسائل کنونی علوم‌و بمفهوم موجود دقت منطقی ، جواب میدهد و ثانیاً عمیق‌ترشدن این مفاهیم وبحثهائی که در اطراف آنها جریان دارد باعث دورانداختن این اصول نمیشود و نخواهد شد ، بلکه در جهتی که درك آنها دقیق‌تر وعمیق‌تر شود پیش خواهد رفت ، در باره نتایجی که از این پیشرفت بدست خواهد آمد هنوز نمیتوان قضاوت کرد .

اگرچه استقرار اصول یك‌تئوری درنتیجه تکامل آن انجام‌میگیرد، ولی‌نمیتوان آنرا پایان تئوری دانست ، بلکه برعکس بعنوان محرك جدیدی به تئوری خدمت خواهدکرد . در آنالیز هم همینطور است ؛ همراه با دقیق شدن اصول آن ، تئوری ریاضی جدیدی بنام‌تئوری عمومی مجموعه‌های بی‌نهایت (مجموعه‌هائی از اشیاءِ انتزاعی دلخواه ، خواه‌مجموعه اعداد باشد یا نقاط یا توابع و یا «شئیی» دیگری از این‌قبیل) بوجود آمد . این تئوری بوسیلهٔ ژرژکانتورG.cantor ریاضی‌دان آلمانی در سالهای ۷۰ قرن گذشته بوجود آمد . برپایه این افکار فصل جدیدی بنام تئوری توابع حقیقی در آنالیز بوجود آمد ، که در باره آن وهم درباره مفهوم اصول آنالیز وتئوری مجموعه‌ها در فصل پانزدهم بحث خواهد شد . ضمناً ایده‌کلی‌تئوری مجموعه‌ها در همه رشته‌های ریاضی نفوذ میکرد . اما«نقطه نظرتئوریك مربوط به مجموعه‌ها» بطور انفکاك ناپذیری با دوره‌جدیدتکامل‌ریاضی مربوط‌است،دوره‌ای که درباره آن هم‌اکنون مختصری صحبت خواهیم کرد .

۷

ریاضیات معاصر

۱ ـ چهاردوره تکامل ریاضیات که قبلا ذکر کردیم ، با درجات آموزش ریاضی تطبیق میکند ؛ باین ترتیب که محتوی اساسی هریك ازاین دوره‌ها را میتوان دقیقاً با سطح آموزش ریاضی در درجات مختلف تحصیلی ، مقابله کرد .

همه ما نتایج اساسی حساب و هندسه را که دراولین دوره تکامل ریاضیات بدست آمده است میدانیم ، این نتایج موضوع آموزش مقدماتی را تشکیل میدهد . مثلا برای تعیین مقدار مصالحی که برای انجام‌کاری ، ومثلا فرش‌اطاق ، لازم است ، ازاین نخستین نتایج ریاضی استفاده می کنیم .

مهمترین موفقیتهای دوره‌دوم (دوره ریاضیات مقدماتی) ، موضوع آموزش دوره متوسطه‌را تشکیل میدهد .

نتایج اساسی دوره سوم (اصول آنالیز، تئوری معادلات دیفرانسیل ، جبر عالی وغیره) موضوع اساسی آموزش ریاضی هر مهندسی است . این نتایج در برنامه هر مدرسه عالی و هردانشکده‌ای بجزدانشکده های غیرتخصصی بنحوی از انحاءِ وجوددارد. بنابراین افکار و نتایج اساسی این دوره ریاضیات تقریباً برای همه مهندسین و محققین علوم طبیعی روشن است و کم وبیش مورد استفاده آنها قرار میگیرد .

برعکس افکارونتایج دوره اخیرتکامل‌ریاضیات، بطوراساسی تنها دردانشکده‌های اختصاصی فیزیك و ریاضی مطالعه میشود ، علاوه برمتخصصین ریاضی ،کارکنان علمی در رشته های مکانیك ، فیزیك و یك عده از رشته های صناعت Technique جدید

از این نتایج استفاده میکنند . البته ، این بآن معنی نیست که این نتایج از کار بـرد عملی دورند ، بلکه از آخرین نتایج تکامل علوم ناشی شده و بنابراین طبیعی است که بغرنج‌تر جلوه کنند . حالا که میخواهیم خواص عمومی دوره اخیر تکامل ریاضیات را مورد بحث قرار دهیم ، نمیتوانیم اطمینان داشته باشیم که همه آنچه را کـه بطـور خلاصه خواهیم گفت واضح و روشن از آب درآید . ما کوشش می کنیم که تنها خطوط اساسی رشته های جدید ریاضی را ذکر کنیم و بحث مفصل‌تر آنها را بفصول مربـوطه کتاب وامیگذاریم ..

اگر مطالعه این قسمت مشکل بنظر آید ، خواننده میتواند از خواندن آن قبلا صرفنظر کند و پس از آنکه با فصول اختصاصی مربوطه آشنا شد بآن برگردد.

۲ ـ شروع دوره معاصر درتکامل ریاضیات ، بوسیله تغییرات‌عمیقی که درهمه رشته های اساسی آن : جبر ، هندسه و آنالیز پدید آمد ، مشخص میشود . ایـن تغییردرهندسه‌باوضوح بیشتری بچشم‌میخورد. درسال ۱۸۲۶ لباچوسکی Lobatchefski و تقریباً همزمان با اویانوش بایای [این همان کسی‌است که فرانسویها اورا ژان بولیه j– Bolyai می‌نامند . مترجم] ریاضی دان مجارستانی هندسه جدید غیر اقلیدسی را بوجود آورده و تکامل دادند . ریاضی دانان خیلی زودافکار لباچوسکی را نفهمیدند: این افکار خیلی جسورانه و غیرقابل انتظار بود . ولـی مخصوصاً از همین زمان بود که تکامل کاملاجدید هندسه شروع ومفهوم‌آن هم عوض‌شد وموضوع و زمینه موردمصرف آن بسرعت وسعت پیدا کرد . اساسی‌ترین قدمی که بعد از لباچوسکی در اینجهت برداشته شد ، در سال ۱۸۵٤ و بوسیله ریاضی دان مشهور آلمانی ریمان Riemann بود . ریمان فکر نامحدودبودن تعداد « فضاهائی » راکه‌هندسه میتواند مطالعه کند، منظم کرده و بامکان حقیقی بودن مفهوم‌آنها هم اشاره‌مینماید .

دو خصوصیت زیر ازمشخصات تکامل جدید هندسه است :

اولا : اگر هندسه قبلا تنها اشکال **فضائی** و روابط جهان مادی را (تنها بهمان اندازه که در چهارچوب هندسه اقلیدسی منعکس میشدند)مطالعه‌میکرد ، حالا موضوع مطالعه‌آن انواع **دیگر** اشکال‌و روابط واقعیات است ، روابطی که تنهاشباهتی با روابط فضائی دارد و بهمین علت هم میتوان برای بررسی آنها از روشهای هندسی استفاده کرد . باین ترتیب اصطلاح «فضا» در ریاضیات مفهوم جدید وسیع‌تر و در عین حال خاص‌تری پیدا کرده و ضمناً خود قواعد هندسه هم بمراتب غنی‌تر و همه‌جانبه

ترشده‌است ؛ (این قواعد بنوبهٔ خود وسائل کاملتری برای شناخت فضای فیزیکی که مارا احاطه کرده است بدست میدهد ، همان فضائی که هندسه مقدماتی از آن منتزع شده بود) .

ثانیاً : حتی درهندسه اقلیدسی هم تغییرات مهمی بوجودآمد که امکان مطالعه خواص اشکال کاملا بغرنج‌تر را (تا بررسی مجموعه دلخواه نقاط) ، بوجود آورد . همچنین برای بررسی خواص اشکال اسلوب کاملاجدیدی بوجودآمد :خواص جداگانه‌ای را منتزع کرده و جدا از سایر خواص مورد بررسی قرار میدهند ؛ ضمناً این انتزاع در **داخل** هندسه هم رشته‌های مخصوص بخودی بوجود میآورد که خودشان «هندسه‌های» مستقلی را تشکیل میدهند. تکامل هندسه درتمام این جهات ادامه دارد و موضوع آن بررسی «فضاهای» جدید و جدیدتر و «هندسه‌های» مربوط بآنهاست : فضای لباچوسکی، فضای تصویری ، فضاهای اقلیدسی و غیراقلیدسی با بعدهای مختلف و مثلا فضای چهار بعدی ، فضای ریمانی ، فضای فینسلروفی Finslerov ، فضاهای توپولوژی و غیره .این تئوریهاموارد استعمال فراوان هم درریاضیات (علاوه برهندسه) وهم درفیزیك و مکانیك پیدا کردند ، ضمناً مورد مصرف مهم در تئوری نسبیت یعنی تئوری فیزیك معاصر در باره فضا : زمان و جاذبه پیدا کرده‌اند . از آنچه که گفته شد روشن میشود که صحبت برسر تغییر کیفی هندسه است .

افکار هندسه معاصر و بعضی مطالب مربوط ببررسیهای مختلف درباره فضاهای هندسی در فصول ۱۷ و ۱۸ روشن خواهد شد .

۳ ـ درجبرهم یك تغییر کیفی بوجودآمد : در نیمه‌اول قرن گذشته تئوریهای جدیدی مطرح شد که منجر به تغییر جبر و توسعه موضوع و حوزه کار برد آن گردید .

همانطورکه قبلا گفته شد ، جبر در پایه اولیه‌اش عبارت از علم اعمال حساب درباره اعداد ، منتهی بصورت‌کلی ومنتزع از اعداد مشخص ومفروض ، بود . این‌انتزاع باین ترتیب منعکس میشود که مقادیر را بوسیله حروف نمایش داده و بکمك آنها اعمالی را از روی قوانین معین اجرا میکنند .

جبر معاصر این پایه را حفظ کرده و آنرا بی‌اندازه وسعت داده است . درجبر معاصر «کمیات» را با طبیعتی که خیلی‌کلی‌تر از طبیعت اعداداست مطالعه می‌کنند ، ضمناً اعمالی که روی این «کمیات» انجام میشود کم وبیش شبیه بخواص ظاهری اعمال معمولی حساب یعنی جمع، تفریق ، ضرب وتقسیم‌است . ساده‌ترین نمونه این کمیات، کمیات برداری است و بطوریکه میدانیم میتوان طبق قانون متوازی‌الاضلاع روی آنها

عمل کرد . اما تعمیمی که در جبر معاصر صورت گرفته تا آنجا پیش رفته که خـود اصطلاح «کمیت» هم مفهوم خود را از دست داده و بطورکلی در باره «اشیاء» صحبت میشود و اعمالی هم شبیه باعمال جبر معمولی روی آنها انجـام میگیرد : مثلا واضح است که دوحرکت ، وقتی که یکی پس از دیگری انجام گیرد، معادل با یك‌حرکت منتجه است ، یا دو عمل جبری ، که پشت سرهم روی فرمولی انجام شود ، معادل با یك عمل جبری (که نتیجه‌ای از آن دو عمل است) میباشد و غیره . باین تـرتیب میتوان درباره نوعی«جمع» که شامل جمع حرکات ، اعمال جبری وغیره میشودصحبت کرد . جبر معاصر همه اینگونه «جمع‌ها» و بسیاری دیگر ازاین قبیل را بصورت‌کلی و انتزاعی مورد مطالعه قرارمیدهد .

تئوریهای جدید جبر که در اینجهت پیش میرود ، در نیمه اول قرن گذشته و در نتیجه بررسیهای یك عده از ریاضی‌دانان مطرح شد که از میان آنها بخصوص باید از گالوا Galois ریاضی‌دان فرانسوی (۱۸۱۱ ــ ۱۸۳۲) نام برد ، مفاهیم جبرمعاصر و روشها و نتایج آن در آنالیز ، هندسه ، فیزیك ، بلورشناسی Cristallographie و غیره مورد مصرف اساسی پیدا کرده است ، بخصوص ا . س . فدوروف Fedorov علم تقارن بلورها راکه قبلا از آن نام بردیم ، با تکیه به ارتباط هندسه و یکی از تئوریهای جدید جبر بنام تئوری گروه‌ها La théorie des groupes بوجودآورد و تکامل داد .

می‌بینیم که صحبت برسه تعمیم اساسی و کیفی موضوع جبر و برسرتغییر درك مفهوم جبر است . (افکار مربوط بجبر معاصرو بعضی از تئوریهای آنرا در فصول ۱۶و ۲۰ خواهیم دید) .

۴ ــ آنالیز هم باتمام رشته هایش عمیقاً دگرگون شد ؛ اولا همانطور کـه گفته شد ، اساس آنالیز دقیق‌تر شد و بخصوص مفاهیم اساسی آن : تابع ، حـد ، انتگرال وبالاخره مفهوم کمیت متغیربشکل دقیق وعمیقی تعریف شد . (تعریف دقیق عدد حقیقی هم داده‌شد) . تدقیق‌اصول آنالیزازکارهای بالتسانو Boltzano ریاضی‌دان چك (۱۷۸۱ ــ ۱۸۴۸) و کوشی Cauchy ریـاضی دان فرانسوی (۱۷۸۹ ــ ۱۸۵۷) و عده دیگری از ریاضی‌دانان سرچشمه میگیرد . این تدقیق مربوط بهمان دوره‌ای‌است که تکامل جدید جبرو هندسه هم در آن انجام گرفت و در سالهای ۸۰ قرن گذشته بوسیلهٔ ریاضی‌دان آلمانی ویرشتراس Wierstrass ، ددکیند Dedchind و کانتور Cantor تا اندازه‌ای بپایان‌رسید . همانطور که در پایان‌قسمت۶ هم گفته شد ، شخص

اخیر تئوری مجموعه های بی‌نهایت را ، که نقش بزرگی در تکامل جدید ریاضی‌بازی میکند ، بنیان نهاد .

تدقیق مفاهیم تابع و متغیر همراه با تئوری مجموعه‌ها زمینه را برای تکامل بعدی آنالیز فراهم کرد : انتقال بمطالعه توابع کلی‌تر انجام گرفت و دستگاه آنالیز یعنی حساب دیفرانسیل و انتگرال هم در همین جهت تعمیم پیدا کرد . باین ترتیب (همانطور که درقسمت ۶ خاطرنشان کردیم) ، در آستانهٔ قرن‌ما فصل‌جدیدی بنام‌تئوری توابع متغیر حقیقی در آنالیز بوجود آمد . تکامل این تئوری بیش از همه مدیون ریاضی‌دانان فرانسوی بورل Borel ، له‌بگ Lebesgue ودیگران وپس از آن‌بخصوص مدیون ن . ن . لوزینا Luzina (۱۸۸۳ ـ ۱۹۵۰) و مکتب او میباشد . فصول جدید آنالیز را مجموعاً « آنالیز معاصر » و فصول قبلی را « آنالیز کلاسیك » نام گذاشته‌اند .

در آنالیز تئوریهای جدید دیگری هم بوجود آمد : مثلا تئوری تقریب‌توابع ، که خود رشته خاصی‌بوده و مسائل مربوط به بهترین نمایش تقریبی توابع عمومی را بوسیلهٔ توابع مختلف «ساده» و در مرحلهٔ اول بوسیلهٔ کثیرالجمله‌ها یعنی توابعی‌بصورت:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

مطالعه میکند .

تئوری تقریب توابع ، لااقل ازاین لحاظ که اصول‌کلی برای محاسبه عملی‌توابع وتغییرتقریبی توابع مرکب را ازروی توابع ساده بدست میدهد ، دارای اهمیت فوق‌العاده است . نطفه های این تئوری ازهمان زمان بوجودآمدن آنالیز وجود داشت ولی ریاضی دان بزرك روس پافنوتی چبیشف P.Tchebichef (۱۸۲۱ـ۱۸۹۴) بود که مسیرفعلی را بآن داد . این تئوری بعدها تکامل یافت وبه تئوری‌ترکیبی توابع تبدیل شد واین تکامل هم بیش ازهمه مدیون زحمات ریاضی دانان شوروی و بخصوص س. ن برنشتین Bernstein (متولد ۱۸۸۰) میباشد . تقریب توابع در فصل ۱۲ شرح داده شده است .

بالاتر صحبت ازتکامل تئوری توابع متغیر مختلط کردیم . اکنون لازم است که ازتئوری کیفی معادلات دیفرانسیل ، که برداشت اولیه‌آن ازکارهای پوانکاره Poincaré (۱۸۵۴ـ۱۹۱۲) ولیاپونوف Liapounoff (۱۸۵۷ـ۱۹۱۸) سرچشمه میگیرد (و در بارهٔ مفهوم آن درفصل پنجم صحبت خواهد شد) ، وهم از تئوری معادلات انتگرال و غیره نام‌ببریم. تئوریهای‌اخیراهمیت‌عملی‌زیادی درمکانیك،فیزیك وصناعت Technique

دارد . مثلا تئوری کیفی معادلات دیفرانسیل مسائل مربوط به تعادل حرکت، کاردستگاه های مکانیکی ، دستگاههای نوسانات الکتریکی و غیره را حل میکنند . مفهوم کلی ثبات یك سیر Procès باین معنی است که اگر درمفروضات و یاشرایط اولیه آن تغییر کوچکی بدهیم ، درجریان سیرودرتمام رژیم آن ، در دورانی که وجود دارد ، تغییرات کوچکی حاصل شود . اهمیت مسائلی ازاین قبیل درصناعات احتیاجی بتوضیح ندارد .

۵ ـ درزمینه تکامل آنالیزوفیزیك ریاضی که باایده های جدید هندسه و جبر تلفیق شده است، رشته جدید ووسیعی بنام آنالیز فونکسیونل [تابعی = Fonctionnel] بوجود آمد که نقش بسیارمهمی در ریاضیات معاصر بازی میکنند . درایجاد این رشته آنالیز دانشمندان زیادی شرکت داشته‌اند که ازمیان آنها میتوان مثلا از هیلبرت Hilbret ریاضی دان بزرك آلمانی (۱۸۶۲ـ۱۹۴۳) و ریسا Rissa ریاضی دان مجارستانی (۱۸۸۰ ۱۹۵۶) وباناخا Banakha ریاضی دان لهستانی (۱۸۹۲ـ ۱۹۴۵) نام برد. دانشمندان جوان شوروی هم به نتایج مهمی که مربوط بفیزیك وریاضی است ، دراین رشته رسیده‌اند فصل ۱۹ مخصوص به آنالیز فونکسیونل است .

ماهیت این قسمت جدید ریاضیات بطور خلاصه چنین است : اگر در آنالیز کلاسیك ، متغیرعبارت ازیك کمیت (عدد) است، درآنالیزفونکسیونل خودتابع بعنوان متغیرمورد بررسی قرارمیگیرد . دراینجا خاصیت توابع مفروض نه بخودی خود ، بلکه بوسیله رابطه این توابع با توابع دیگرمعین میشود . بنا براین در آنالیز فونکسیونل توابع جداگانه بررسی نمیشود ، بلکه یکباره مجموعه همه توابعی که دارای این و یا آن خاصیت مشترك هستند (ومثلاهمه توابع اتصالی) مورد بر رسی قرار میگیرد . چنین مجموعه توابع درفضای موسوم به «فضای فونکسیونل» متحد میشوند . این مطلب متناظر با اینست که ما مثلا بتوانیم مجموعه همه منحنیهای روی یك صفحه و یا همه حرکات ممکنه دستگاه مکانیکی مفروضی را مطالعه کنیم وخواص منحنیها ویاحرکات جداگانه را از روی روابطی که باسایرمنحنیها ویاسایرحرکات دارد معین کنیم .

انتقال ازمطالعه ویاجستجوی توابع منفرد به بررسی **توابع متغیر** شبیه به انتقال ازاعداد مجهول x و y به x و y **متغیر** یعنی شبیه بافکاروایده‌های دکارت است که قبلا بآن اشاره کردیم . براساس همین ایده‌ها بود که دکارت جبروهندسه یعنی معادله ومنحنی را تلفیق کرد ، کوششی که میتوان آنرا یکی از عوامل تعیین کننده در بوجود آمدن آنالیزدانست .

امروزهم تلفیق مفهوم توابع متغیرباایده‌های جبروهندسه معاصر، آنالیزفونکسیونل

را بوجود آورد ؛ همانطور که آنالیز برای تکامل مکانیك آنزمان ضروری بود ، آنالیز فونکسیونل هم روشهای جدیدی برای حل مسائل فیزیك ریاضی بدست داد و متضمن یك دستگاه ریاضی برای مکانیك اتمی و کوانتائی جدید بود . تاریخ تاحد معینی تکرار میشود ، ولی بشکلی جدید و درسطحی بالاتر. همانطور که گفتیم ، آنالیز فونکسیونل ایده ها و روشهای اساسی آنالیزرا باجبروهندسه تلفیق کرد و بنوبه خود در تکامل آنها تاثیرنمود . مسائل مربوط به آنالیز کلاسیك ، امروز راه حلهای جدید و عمومی بوسیله آنالیزفونکسیونل بدست میآورد . آنالیز فونکسیونل بمثابه کانونی است که ایده های کاملا عمومی وانتزاعی ریاضیات معاصر درآن جمع میشود وثمرات عملی ببارمیآورد .

باهمین نظر کوتاه و با همین شمردن مسیرهای جدید آنالیز (تئوری توابع متغیر حقیقی، تئوری تقریب توابع ، تئوری کیفی معادلات دیفرانسیل، تئوری معادلات انتگرال وآنالیزفونکسیونل) میتوان فهمید که در واقع صحبت برسر دوره‌ای است که درآن تکامل آنالیز در راهی که بکلی و ازپایه جدید است، قدم گذاشته است .

۶ـ همیشه نوع وتکنیك محاسبه، درخود روشهای ریاضی تأثیراساسی داشته‌است وسائل محاسبه‌ای که تااین اواخردراختیارداشتیم کاملا محدود بود . ساده ترین وسائل مربوط بمحاسبه، یعنی تابلوهای لگاریتم وخط کشهای لگاریتمی، ماشین حساب وبالاخره ماشینهای محاسبه ای ـ تحلیلی وماشین حساب خودکار Automatique : اینها تنها وسائل محاسبه‌ای هستند که درسالهای ۴۰ قرن بیستم وجود داشته‌است . این وسائل انجام کم وبیش سریع اعمال جداگانه (جمع ، ضرب وغیره) را تأمین میکرد . اما برای بدست‌آوردن نتیجه عددی مسائلی که طرح میشد، گاهی لازم بود که تعداد فوق‌العاده زیادی اعمال شبیه بهم انجام دهیم . این اعمال غالباً ضمن بدست آوردن نتایج و طبق برنامه بغرنجی طرح میشد و باین ترتیب حل‌چنین مسائلی یاغیر عملی بود و یا اینکه باتقسیم راه حل، براه حلهای ساده‌تر، پس‌ازیك رشته عملیات مفصل تأمین‌میشد .

دردهه اخیروجلوچشمان ما تمام سطح فن محاسبه ازریشه واساس تغییرمیکند. ماشینهای جدید بر اصول جدید ساخته شده‌اند و میتوانند یك رشته محاسبات بغرنج را که ازقبل برای ماشین طرح شده ، بابرنامه انعطاف پذیر وبطورخود کار و با سرعت فوق‌العاده زیاد انجام دهند . بعضی مطالب مربوط بساختمان و اهمیت ماشینهای‌حساب معاصر درفصل ۱۴ شرح داده شده است .

تکنیك جدید نه تنها محاسباتی را که قبلا غیرعملی بنظرمیرسید ، در دسترس میگذارد ، بلکه مارا وادار میکند که ارزیابی خودرا نسبت به بسیاری ازنتایج‌مشخص

ریاضیعوض کنیم . باکمك تکنیك جدید، بخصوص روشهای تقریبی تکامل پیدا میکند روشهائی که امکان‌میدهد بوسیله یك‌رشته عملیات مقدماتی ، به‌نتیجه عددی مورد لزوم باتقریب دلخواه برسیم . ضمناً خود این روشهارا هم بایدازنقطه نظرراحتی اجرای‌آنها درماشینهای مربوطه ، ارزیابی کنیم .

منطق ریاضی هم ارتباط ناگسستنی با تکامل فن جدید محاسبه دارد . منطق ریاضی قبل ازهمه بخاطراحتیاجات درونی ریاضی ، که مربوط باشکالات موجودآنست تکامل مییابد وموضوع آن عبارتست‌ازتجزیه وتحلیل‌استدلالهای ریاضی . منطق‌ریاضی درعین حال که خود قسمتی‌ازریاضی است شامل‌آن قسمت ازمنطق عمومی هم میشود که بتواند روشهای ریاضی را تکامل داده وبطورعینی تنظیم کند .

منطق ریاضی ضمن اینکه ازیکطرف باسرچشمه و اساس ریاضیات سروکار دارد ازطرف دیگرارتباط محکمی بامسائل کاملا جدید فن محاسبه دارد . مثلا، طبیعی‌است استدلالی که منجر بایجاد یك سیرمعین میشود تا بوسیله آن بتوانیم به نتیجه لازم و بادقت دلخواه نزدیك بشویم با استدلال انتزاعی تری که وجود این ویاآن نتیجه‌راثابت میکند اساساً فرق دارد .

مسائلی هستند که بایك روش کاملا معین به‌نتیجه واحدی منجر میشوند و باین ترتیب مسئله حد عمومی بودن اینگونه مسائل هم یك رشته سئوالات مطرح میکند . ازاین راه هم نتایج عمیقی درمنطق ریاضی بدست میآید که از نقطه نظر شناخت بطور کلی دارای اهمیت فراوانی است .

مبالغه نخواهد بود اگربگوئیم که در ریاضیات معاصر ، با توجه بفن جدید محاسبه وباموفقیتهای منطق ریاضی، دوره جدیدی بوجود میآید که موضوع آن نه‌تنها چیزهای مختلف است ، بلکه راهها واشکالی‌هم که بوسیله‌آنها بتوان این چیزهارامعین کرد، جزوموضوع آن میشود . نه‌تنها مسائل مختلف ، بلکه وسائل ممکنه راه حل آنهارا هم دربرمیگیرد.

بآنچه که گفتیم باید اضافه کنیم که رشته های قدیمی ترریاضی ــ تئوری‌اعداد، هندسه اقلیدسی ، جبروآنالیز کلاسیك وتئوری‌احتمالات ــ درتمام دوره ریاضیات‌معاصر هم باشدت تمام بوسیله افکارونتایج جدیدی تکامل پیدا کرده و عمومیت پیدا میکند . مثلاافکارونتایجی که درتئوری اعداد وهندسه بوسیله ریاضی‌دانان چبیشف Tchebichef وفدورف Fedorov ووینا گرادوف Vinagradov و دیگران وارد شده و همچنین تکامل وسیع تئوری احتمالات مربوط بقوانین اساسی فیزیك آماری و مسائل صناعت معاصررا میتوان ذکر کرد .

۷ـ کلی‌ترین خطوط مشخصه ریاضیات معاصر، که ضمن بررسی تکامل هندسه، جبر و آنالیز ظاهر میشود کدام است؟

قبل از هر چیز باید از وسعت بی‌اندازه موضوع ریاضیات و وسعت حوزه کاربرد آن نام برد، یك چنین وسعت موضوع و حوزه کاربرد ضمناً بمعنای آنست که ریاضیات بطور کمی و کیفی فوق‌العاده رشد کرده و نظریه ها و روشهای نیرومند جدیدی بوجود آورده که اجازه میدهد مسائلی را که قبلا لاینحل بنظر میرسید، حل کنیم. توسعه موضوع ریاضیات قبل از همه از اینجا مشخص میشود که ریاضیات معاصر دانسته و باشعور کامل، مطالعه انواع ممکنه روابط کمی واشکال فضائی را درمقابل خود قرار داده است:

خصلت دیگر ریاضیات معاصر اینست که مفاهیم جدید عام و کلی، که در سطح بالاتری از انتزاع قرار دارد، بوجود میآورد و بخصوص همین خصیصه آنست که یکپارچگی و یگانگی ریاضیات را علی رغم رشد آن وعلی‌رغم رشته های مختلف آن حفظ میکند.

مفاهیم ونظریه‌های کلی‌وعام، یگانگی وکلیت را در رشته‌هائی که کاملا از یکدیگر دورند تامین می کند، همین مفاهیم ونظریه ها هستند که بروشها کلیت میدهد ومورد مصرف رشته های اساسی ریاضیات یعنی هندسه وجبر و آنالیز وتاثیر متقابل و عمیق آنها را دریکدیگر تامین می کند.

تسلط معین نقطه نظر «نظریه‌ای ـ مجموعه‌ای» را هم باید بعنوان خصیصه‌ای از ریاضیات معاصر ذکر کرد. البته این نقطه‌نظر باین علت اهمیت پیدا می کند که مصالحی را که در اثر تکامل قبلی ریاضیات انباشته شده است جمع بندی می کند.

بالاخره یکی از خطوط مشخصه ریاضیات معاصر عبارتست از تجزیه وتحلیل عمیق‌تر مبانی آن، تجزیه و تحلیل مفهوم وساختمان نظریه‌های جداگانه آن وتجزیه و تحلیل خود طرق اثبات ونتیجه گیریهای ریاضی. بدون یك چنین تجزیه و تحلیلی، خود نظریه ها و اصول تعمیم دهنده ریاضیات نمیتوانست تکمیل شده و به پیشرفت خود ادامه دهد.

خصیصه‌اساسی و تعیین کننده ریاضیات معاصررا باید در این دانست که موضوع آن تنها روابط کمی مفروض و اشکال مفروض نیست، بلکه هر گونه روابط کمی‌واشکال ممکنه هم مورد بحث آنست. درهندسه نه تنها صحبت برسر روابط و اشکال فضائی، بلکه برسر هر گونه روابط واشکال ممکنی که تنها شبیه روابط و اشکال فضائی هستند نیز میباشد. درجبر صحبت برسر سیستمهای مختلف اشیاء مجرد وقوانینی که میتوان روی آنها اعمال کرد، میباشد. درآنالیز نه فقط کمیت، بلکه خود تابع هم بعنوان متغیر مطالعه میشود. درفضای فونکسیونل همه توابعی که ازانواع مختلف باشند، یعنی هر گونه

روابط ممکن بین متغیرها ، متحد میشود .

بنابراین بطورخلاصه میتوان گفت که اگر ریاضیات مقدماتی، ریاضیات کمیات ثابت و ریاضیات دوره بعدازآن، ریاضیات کمیات متغیراست ، **ریاضیات معاصر ریاضیات انواع روابط کمی متغیر وانواع ارتباط بین کمیات است.**
البته این تعریف کامل نیست ولی متضمن خصلتی ازریاضیات معاصراست که تفاوت کیفی آنرا باریاضیات دوره های قبلی نشان میدهد .

۸

ماهیت ریاضیات

۱- اکنون باتوجه‌بآنچه که گفته شد، میتوان نتایج کلی درباره ماهیت ریاضیات بدست آورد :

ماهیت ریاضیات در یکی از بخشهای کتابی که در جواب دورینگ نوشته شده روشن شده وما دراینجا این قطعه جالب رانقل می کنیم . خواننده دراین قطعه‌بسادگی همان چیزی را می‌بیند که مثلا درباره حساب و هندسه قبلا صحبت کردیم؛ علت‌این مطلب معلوم است ؛ ما برای فهم تاریخ واقعی بوجود آمدن و تکامل ریاضیات منطق فلسفهٔعلمی dialectique را راهنمای‌خود قراردادیم . منطق فلسفهٔعلمی بخصوص باین علت مارا به‌نتیجه‌گیریهای صحیح میرساند که هیچ چیز را بحقیقت تحمیل‌نمیکند ، بلکه‌حقایق‌را همانطور که‌هستند ، یعنی روابط وتکامل‌ضروری آنها را ، مطالعه‌میکند.

نویسنده مذکور در بالا ، نوشتهٔ خود را با ملاحظه انتقادی درباره نظریات‌پوچ دورینگ و بخصوص دربارهٔ این نظریه غلط که گویا ریاضیات مخلوق «ذهن‌خالص»بوده و با تجربه ارتباطی ندارد ، شروع میکند او مینویسد :

«کاملا اشتباه است اگر بگوئیم که در ریاضیات خالص ، فکرتنها با مخلوقات و تصورات خودش سر وکار دارد . مفاهیم عدد و شکل از جائی جز از جهان واقعی گرفته نشده است ، ده انگشت که انسان حساب کردن ، یعنی نخستین عمل حساب را روی آنها یاد گرفت ، همه چیزی هست جز محصولی که مخلوق‌خود فکرباشد. برای شمردن ، نه تنها باید اشیائی داشته باشیم که آنها را بشماریم ، بلکه باید این‌استعداد

را هم داشته باشیم که ضمن بررسی این اشیاءِ ، هرخاصیت دیگری بجز شمار را از آن منتزع کنیم و این استعداد هم در نتیجهٔ تکامل تاریخی طولانی که متکی برتجربه‌باشد بدست میآید . مفهوم شکل هم مانند مفهوم عدد منحصراً از دنیای خارج اخذ شده است و در مغز و از تفکر خالص بوجود نیامده است. قبل ازاینکه بتوان بمفهوم‌شکل رسید بایستی اشیائی با شکل معین موجود بوده واین اشکال نیزبا یکدیگرمقایسه شده باشند . موضوع ریاضیات عبارتست‌ازاشکال فضائی وروابط کمی دنیای واقع‌یعنی‌موضوع آن ، مصالح‌کاملا واقعی است .

این واقعیت که این مصالح بصورت فوق‌العاده انتزاعی درمیآیند ، فقط بطور سطحی میتواند این مطلب را که منشاء آن ، جهان خارج است پنهان کند : امابرای اینکه بتوان این اشکال و روابط را بصورت خالص بررسی کرد ، لازم است که آنها را از محتویشان کاملا جدا کرد و این محتوی را بعنوان چیزی که مورد استفاده نیست بکناری گذاشت . باین طریق نقاط بدون بعد ، خطوط بدون ضخامت و عرض و a ها و b ها و x ها و y ها ـ کمیات ثابت ومتغیر ـ را بدست‌میآوریم و تنها پس‌از اینهاست که بمحصولات آزاد مخلوق خود فکر و تصورات آن و بخصوص بکمیات موهومی میرسیم . درست بهمین ترتیب ، نتیجه گرفتن کمیات ریاضی از یکدیگر، که حضوری a priori بنظرمیرسد ، حضوری بودن منشاءِ آنها را ثابت‌نمیکند ، بلکه تنهاعقلانی بودن Rationnel روابط آنها را ثابت میکند . قبل از رسیدن باین فکر که **شکل** استوانه را از دوران مربع مستطیل دور یکی از اضلاعش بدست آوریم ، میبایستی تعدادی مستطیلها و استوانه های حقیقی را ،. ولو اینکه بشکل کامشان هم نباشند ، بررسی کرده باشیم . ریاضیات نیزمانند همه علوم دیگراز **احتیاجات عملی** انسان از اندازه گیری سطح قطعات زمین و ظرفیت ظروف ، از محاسبه زمان و از مکانیك بوجود آمده است . اما مثل سایر رشته هائی که مربوط بفکرند قوانینی که از دنیای واقعی انتزاع میشود ، در درجهٔ معینی از تکامل خود ، از دنیای واقع جدا میشود و بعنوان چیزمستقل و بعنوان قوانینی که از خارج پدیدآمده و جهان بایستی خود را با آنها تطبیق دهد ، در مقابل دنیای واقع قرار میگیرد . همانطورکه درمورداجتماع و حکومت صادق است ، ریاضیات **خالص** هم بعدها در مورد جهان بکاربرده میشود. ریاضیات خالص از خود جهان اخذ شده و تنها قسمتی از شکل ارتباطات مربوط‌بآنرا منعکس میکند و بخصوص بهمین مناسب است که اصولا میتواند مورد مصرف پیدا کند .»

۳ ـ باین ترتیب نویسنده بالا تاکید میکند که ریاضیات واقعیت را منعکس

میکند ، تاکید میکند که ریاضیات از احتیاجات عملی مردم بوجود آمده و نخستین مفاهیم وکاربردهای آن درنتیجهٔ تکامل تاریخی طولانی که برتجربه متکی است، بدست آمده است و ما این مطلب را با تفصیل کامل روی نمونه حساب و هندسه تعقیب کردیم .

ما بخصوص متقاعد شدیم که مفاهیم عدد ، کمیت و شکل هندسی بهمین نحو بوجود آمدند واین‌مفاهیم روابط کمی واقعی واشکال فضائی واقعیت‌را منعکس‌می کنند. درست بهمین ترتیب مفاهیم اساسی آنالیز هم انعکاسی از روابط کمی واقعی هستند ، این مفاهیم بتدریج و براساس مصالح مشخص زیادی ، رویهم انباشته شده‌اند ؛ مثلا مفهوم‌تابع، شکل انتزاعی ارتباطات مختلف بین کمیات واقعی را ، بطور کلی ، منعکس میکند .

نویسنده مذکور در بالا با جمع‌بندی همه اینها باین نتیجهٔ اساسی میرسد که **موضوع ریاضیات مصالح معین کاملا واقعی است، ولی ریاضیات این مصالح را منتزع ازمحتوی مشخص و خصوصیات کیفی آنها بررسی میکند** . و در همین جاست که ریاضیات از علوم طبیعی جدا میشود .

امکان اینکه موضوع ریاضیات را بطور انتزاعی بررسی کنیم ، در خود موضوع ریاضیات پایه عینی دارد ؛ این اشکال ، نسبتها ، روابط متقابل و قوانینی که مستقل از خصوصیات کیفی و یا محتوی مشخص آنها در ریاضیات منعکس میشود بطور عینی و مستقل از ذهن ما وجود دارد . تنها باین علت که عدد بمنزله خاصیت عینی مجموعه اشیاء است و باین علت که روابط بین اعداد ، مستقل از خصوصیات کیفی اشیاء است و بعلت غنای همین روابط ، بوجود آمدن حساب میسر شده است . جائی که یك چنین اشکال وروابط‌کلی،اشکال وروابطی که مستقل‌ازمحتوی باشد ، وجود نداشته‌باشد، بررسی ریاضی هم ممکن نخواهد بود .

۳ ـ خصوصیت اساسی که برای ریاضیات ذکر کردیم، خصوصیات دیگری که خصلت ریاضی را معین میکنند وما در قسمت ۲ بعضی از آنها را بطور خاص روی نمونهٔ حساب مطالعه کردیم بدنبال دارد . این خصوصیات عبارتند از «زبان فرمولی » خاص ریاضی ، وسعت‌کاربرد آن ، واینکه نتیجه گیریهای ریاضی جدا از تجربه بدست‌میاید و بالاخره خصیصه الزامی‌بودن و متقاعد کننده بودن این نتیجه گیریها .

این‌خصیصه ریاضیات که موشکاف ودقیق است همیشه ازخصوصیات اساسی ریاضی بوده و بهمین علت آنرا بطور مفصل موردبحث قرار میدهیم .

اگر مفهوم عدد را از موارد مشخص آن جدا کنیم و اعداد صحیح را بطورکلی و صرفنظر از همه روابطی که بااین و یا آن مجموعه مشخص دارد ، بررسی نمائیم ، بخودی خود روشن است که نخواهیم توانست در باره چنین اعداد انتزاعی ، بتجربه به پردازیم . اگر در این سطح انتزاع بمانیم و باشیاء مشخص برنگردیم ، تنها از طریق استدلال ، استدلالی که ازخود مفهوم عدد سرچشمه میگیرد، میتوان به نتایج جدیدی درباره اعداد رسید . البته همه نتیجه‌گیریهای دیگر ریاضی هم بهمین طریق‌اند . اگر درحدود هندسه خالص‌باقی بمانیم، یعنی اگراشکال هندسی را بصورت انتزاعی ، انتزاع از هرگونه محتوی کیفی و مشخص ، بررسی نمائیم بجز طریق استدلالی که از خود **مفهوم** این و یا آن شکل وازخود مفاهیم اصولی ویا اصول هندسی ناشی شده باشد راه دیگری برای رسیدن به نتایج جدید وجود نخواهد داشت . مثلا خاصیت دایره بعنوان مکان هندسی نقاطی که از یك نقطه مفروض بیك فاصله‌اند ، از خود مفهوم گردی گرفته شده است . هیچکس درباره تحقیق هر قضیه بطریق‌تجربی ، حتی فکر هم نمیکند .

بنابراین خصیصه انتزاعی بودن ریاضیات ، این حقیقت رااز قبل مشخص میکند که قضایای ریاضی تنها از راه استدلالی که ناشی از خود مفاهیم ریاضی است ، اثبات میشود .

میتوان گفت که ریاضیات ، روابط کمی را با توجه بآنچه که در تعاریف آنها وجود دارد ، بررسی می کند ، بنابراین نتیجه‌گیریهای ریاضی را از طریق استدلالی که از تعریف سرچشمه میگیرد ، بدست میآورند . البته این کلمات را نباید بطور ملانقطی فهمید و تصور کرد که قبل از بوجود آمدن نظریه مربوطه ریاضی ، تعاریف کاملا دقیق و منظمی از مفاهیم آن نظریه وجود دارد ؛ در حقیقت خود مفاهیم همراه با تکامل تئوری و در نتیجهٔ این تکامل دقیق‌تر میشود . تحلیل عمیق مفهوم عدد صحیح و همچنین تنظیم دقیق اصول هندسی در اواخرقرن نوزدهم داده شدنه در دوران قدیم. اصولا اشتباه است ، اگر فکر کنیم که گویا مفهوم معین وکاملادقیقی در ریاضیات‌وجود دارد . هرمفهومی ، اگرچه ازنظر تعریف‌کاملا دقیق بنظربرسد ، بازهم تغییرمیکند و همراه با تکامل علم تکامل مییابد و دقیق‌تر میشود . تکامل ریاضیات ، نه تنها در این مورد ، بلکه در باره تمام مفاهیم ریاضی مؤید این نظر است و بدین ترتیب یکبار دیگر هم این اصل اساسی منطق فلسفهٔ عملی ثابت میشود که درجهان هیچ چیزبدون حرکت و بدون سیرتکاملی وجود ندارد . بنابراین درباره مفاهیم ریاضی هم باید گفت که‌اولا تاحدی که برای ماکافی است ، مشخص‌اند نه بطور کامل . ثانیاً دقت و روشنی تعاریف و عمق تجزیه و تحلیل آنها ، ضمن تکامل ریاضیات ، تکامل پیدا می کند ؛

درباره تغییر مفاهیم ریاضی در قسمت بعدی صحبت خواهیم کرد وحالا باتوجه بآنچه که گفته شد ، بخصوص روی این‌مسئله تکیه می کنیم که این‌مفاهیم تاآن حد که برای‌ما کافی‌است ، مشخص‌اند .

بخصوص همین مشخص بودن مفاهیم ریاضی توأم‌با منطق (منطقی که همه جا اهمیت خود را ظاهر میسازد) ، این خصیصه را برای ریاضیات بوجود آورده است که نتیجه‌گیریهای آن متقاعد کننده بوده وضرورت منطقی دارد . همین ضروری بودن نتیجه‌گیریهای ریاضی است که زمینه را برای این تصور غلط فراهم آورده است که گویا پایهٔ ریاضی برتفکر خالص گذاشته شده و گویا ریاضیات حضوری است واز تجربه ناشی شده است و گویا واقعیت را منعکس نمیکنند . مثلاکانت Kant فیلسوف مشهور آلمانی بهمین نتایج رسید . این یك تصورکاملا غلط وغیرعلمی‌است که بخصوص ناشی‌از آنست که ریاضیات را نه‌بصورتی که واقعاً بوجود آمده و تکامل یاقته ، بلکه بصورت حاضر وآماده آن بررسی میکنند . ولی یك چنین برداشتی ، لااقل باین علت که با واقعیت تطبیق نمیکنند ، نمیتواند دارای ارزش باشد . این مطلب که ریاضیات حضوری نیست ،بلکه متکی‌برتجربه‌است ، واقعیتی انکارناپذیراست. ضمناً اودموس Eudemos رودسی‌هم درباره بوجودآمدن هندسه همین‌نظر را داشته و ما نظراو را قبلا نقل کردیم.

نه تنها خود مفاهیم ریاضی، بلکه نتایج و روشهای ریاضی هم منعکس کننده واقعیت‌اند . این کیفیت مهم را نویسنده «ضددورینگ»هم روشن میکند، وقتی که‌مینویسد :«نتیجه گرفتن کمیات ریاضی ازیکدیگر ، که‌حضوری بنظر میرسد ، حضوری بودن منشاء آنرا ثابت نمیکند ، بلکه تنها عقلانی بودن‌روابط آنها را میرساند.» . نتیجه‌گیریها و استدلالهای ریاضی انعکاسی از روابط واقعی‌هستند که مردم ضمن تجربیات خود ملاحظه می کنند : جمع اعداد انعکاسی است از اجتماع واقعی چند مجموعه بصورت یك مجموعه واحد. منبع اثبات مشهور قضیه تساوی مثلثها که در آن از انطباق آنها صحبت میشود ، بدون تردید در آنجاست که برای مقایسه اندازه‌های‌اشیاء ، همیشه‌آنها را پهلوی هم‌قرارمیدهند؛ محاسبه احجام بوسیلهٔ انتگرال این امکان‌را که میتوان جسم را مجموعه‌ای از قشرهای‌نازك دانست و یا آنرا بقشرهای نازك تقسیم کرد ، بطور انتزاعی منعکس‌می کند . استدلالهای بغرنج‌ترریاضی نتیجه‌ای از تکامل بعدی ریاضیات ، که از اینگونه پایه های مادی سرچشمه میگیرند ، میباشد .

۴ ـ انتزاع کامل موضوع ریاضی ازهر چیزمشخص ، و عقلانی و ذهنی بودن

نتیجه گیریهای ریاضی که برپایه این‌انتزاع قرار دارد ، خصیصه‌مهم دیگری ازریاضیات را بدنبال خود میآورد : در ریاضیات نه فقط آنگونه روابط کمی و اشکال فضائی که مستقیماً ازواقعیت منتزع‌شده‌است ، بررسی میشود، بلکه آن‌روابط و اشکالی هم که در داخل خود ریاضیات و بر پایه اجتماع مفاهیم و تئوریهای ریاضی معین‌شده‌است بررسی میشود . نویسنده «ضددورینگ» بخصوص بهمین خصیصه‌ریاضیات توجه‌دارد ، وقتیکه در باره بوجود آمدن مفاهیم نقطه ، خط و کمیات ثابت و متغیرمیگوید : « ... وفقط پس ازاینهاست که بمحصولات آزاد مخلوق‌خودفکروتصورات آن وبخصوص بکمیات موهومی میرسم .» این یك واقعیت تاریخی است که اعداد موهومی عیناً بهمان نحوی که درباره اعداد صحیح گفتیم ، از واقعیت گرفته نشده‌اند ؛ آنها ، ابتدا در داخل خود ریاضیات و از تکامل‌ضروری جبر بعنوان ریشه‌های‌معادله بصورت $x^{2} = -a$ (وقتی که $a > 0$ باشد) بوجودآمدند واگرچه بتدریج عمل کردن با آنها را باآزادی‌کامل شروع کردند، مفهوم واقعی آنها تا مدتها مجهول باقی ماند و بهمین علت هم هست که نام «موهومی» روی آنها تثبیت شد . ولی بعداً تعبیرهندسی آنها کشف شد و موارد مصرف مهم‌زیادی هم پیدا کرد. درست بهمین‌ترتیب‌هندسه لباچوسکی هم‌محصول‌آفرینش‌فکراین دانشمند بزرگ بود ؛ او باهمیت واقعی این هندسه پی‌نبرد و بهمین علت‌آنرا هندسه «تصوری» نامید . ولی این هندسه یك بازی‌آزاد ذهنی نبود ، بلکه مفاهیم اساسی‌هندسه ناگزیر بآنجا منتهی میشد و لباچوسکی هم آنرا همچون نظریه ممکن اشکال و روابط فضائی مورد بررسی قرار داد . بنابراین «خلق و تصور آزادانه»ای که نویسنده نامبرده درباره آن صحبت میکند ، نباید بعنوان تحمیل ساده ذهن تلقی شود . خلق آزاد در علم عبارت از یك ضرورت منطقی و آگاهانه است و این ضرورت هم از مفاهیم و احکامی ناشی میشود که متکی برتجربه‌اند .

در دوره جدید تکامل ریاضیات ، که با ساختمان هندسه لباچوسکی و تئوری دقیق اعداد موهومی شروع میشود ، مفاهیم و نظریه های جدیدی بوجود آمده و باز هم بوجود میآید که‌مستقیماً ازواقعیت گرفته نشده است،بلکه برپایه‌مفاهیم ونظریه‌هائی قراردارد که قبل ازآنها وجود داشته است . ریاضیات اشکال ممکنه واقعیت را تعیین و بررسی می کند وهمین مطلب یکی ازخصوصیات تعیین کننده دوره اخیرتکامل است .

درك صحیح‌این‌خصوصیت بوسیله نظریه شناخت منطق‌فلسفهٔعلمی انجام‌میگیرد. نویسنده «دفاترفلسفی»مینویسد : «شناخت عبارتست از انعکاس طبیعت بوسیله انسان . ولی این یك انعکاس ساده ، مستقیم وتمام و کمال نیست ، بلکه جریانی است که ازیك سلسله‌تجرید، تنظیم و تشکیل‌مفاهیم وقوانین بوجودآمده‌است ....» ماتریالیسم‌متافیزیك

هم شناخت را بهمین ترتیب قبول دارد وبخصوص ریاضیات را انعکاسی‌ازطبیعت میداند ولی همانطورکه نویسنده بالا متذکرمیشود : نقص ماتریالیسم متافیزیك در اینست که منطق فلسفه علمی‌را درنظریه انعکاس باعدم مهارت‌بکار میبرد . ماتریالیسم متافیزیك پیچیدگی این انعکاس رانمی‌فهمد ، نمی‌فهمد که این‌انعکاس‌ازراه یك‌سلسله انتزاعها، ازطریق تنظیم مفاهیم جدید وساختن نظریه های تازه براساس مفاهیم ونظریه‌هائی که تاآنموقع شکل گرفته است ونه‌تنها ازطریق آنچه که بوسیله تجربه داده میشود بلکه همچنین ازطریق آنچه که میتواند ممکن‌باشد، بدست میآید. اینگونه انتقال‌ازمفروض به ممکن درمورد بوجودآمدن مفاهیمی از قبیل عدد صحیح دلخواه وخط نامحدودهم دیده میشود، زیراازتجربه نه‌اعدادی که باندازه دلخواه بزرگ‌باشد و نه خطوط‌نامحدود بدست نمیآید . اما وقتی که مفهوم عدد جان میگرفت ، ازخود مفهوم‌آن و از قانون تشکیل اعداد متوالی (ازراه اضافه کردن واحد) ، امکان ادامه نا محدود سلسله اعداد بوجودآمد . بهمین ترتیب ازرسم خطوط مستقیم ، امکان ادامه نامحدود خط مستقیم بوجودآمد که‌دراصل‌موضوعه‌دوم Postulat II اقلیدس چنین بیان‌شده است: «هرخط میتواند تابی‌نهایت ادامه پیدا کند» سیربعدی انتزاع‌منجربمفاهیم کاملی ازقبیل سلسله طبیعی اعداد وخط بی‌نهایت شد . در دوره اخیر تکامل ریاضیات ، ساختمان نظریه ها باکیفیت جدید و ازراه یك سلسله انتزاعها و تنظیم مفاهیم انجام گرفت . اما با همه اینکه ریاضیات تا این‌درجه‌ازانتزاع رسید ، بازهم ازواقعیت‌بکلی جدا نشد . هرمفهوم جدید براین اساس که انعکاسی ازواقعیت است ، باکمك منطق داخلی خود ریاضیات، رشد میکند و بخصوص بهمین علت است کـه ضمن مورد استعمالی که درمسائل فیزیك و تکنیك دارد ، بواقعیت برمیگردد . همین مطلب در باره اعداد موهومی وهر نظریه دیگرریاضی (هرچقدرکه انتزاعی باشد) نیزصحیح است .

فضاهای‌مختلف چند بعدی نمونه مشخصی ازاین قبیل است ، این فضاها همراه باتکامل جبروآنالیزوتحت تأثیرمکانیك وفیزیك بعنوان تعمیم هندسه اقلیدسی‌بوجود آمد و باتوجه باین‌افکار، ریمان Riemann یك هندسه عمومی بوجودآورد که بعدها بوسیله سایرریاضی دانان تکامل پیدا کرد و یك رشته مورد مصرفهای مهم پیدا نمود ، همین هندسه ریمانی بالاخره بعنوان یك دستگاه آماده ریاضی ، برای ساختن تئوری نسبیت‌عمومی انشتین Einstein ویا اگردقیق‌تربگوئیم تئوری جاذبه بکاررفت. تئوری های انتزاعی هندسه دفعتاً و یادرنتیجه «هم‌آهنگی قبلی طبیعت وفکر» نبود که‌چنین مورد مصرفهای درخشانی پیدا کردند ، بلکه درنتیجه این بود که این تئوریها بر زمینه هندسه‌ای که مستقیماً ازتجربه گرفته شده بود بوجود آمدند و رشد کردند و هم باین

علت بود که ابداع کنندگان این نظریه ها، نظریات خود را با مسائل مورد بررسی فضای واقعی ارتباط میدادند؛ بخصوص ریمان ارتباط تئوری خودش را با تئوری جاذبه مستقیماً پیش‌بینی کرد.

باین ترتیب درتکامل ریاضیات، قانون تحرك شناخت که بوسیله نویسنده «دفاتر فلسفی» تنظیم شده است، تحقق پیدا می کند. اومینویسد: « تفکر، ضمن انتقال از مشخص به مجرد (بشرطی که این تفکردرست باشد) ازحقیقت دور نمیشود، بلکه بآن نزدیك میگردد؛ تجرید **ماده**. تجرید **قانون** طبیعت، تجرید **ارزش** و غیره، دریك کلمه **همه** تجریدهای علمی (بشرطی که این تجریدها صحیح و جدی باشد نه پرت و پلا)، طبیعت را عمیق‌تر، صحیح تر و کامل‌تر منعکس می کند؛ از تفکر در باره اشیاء واقعی بطرف تفکرانتزاعی رفتن **وازآنجابسمت عمل** بازگشتن. چنین است راه عملی شناخت **حقیقت**، شناخت واقعیت‌عینی».

آنچه گفته شد، نادرست بودن این نقطه نظررا ثابت می کند که گویا نظریه های ریاضی تنها عبارت ازطرحهای قراردادی هستند که وظیفه شان شرح نتایج تجربه ویا «تنظیم جریان احساس» برپایه «اصل اقتصاد درتفکر» میباشد.

نویسنده «ضد دورنیك» متذکرمیشود (نقل قول صفحات قبل را به بینید) که احکام ریاضی درحالی که ازدنیای واقع جدا شده است، بنحوی درمقابل‌آن قرار گرفته وبعنوان طرح حاضروآماده‌ای، برای مطالعه آن بکارمیرود. مثلا ما ازحساب دائماً استفاده می کنیم وآنرا بصورت حاضروآماده‌ای بکار میبریم. این مطلب درباره نظریه هائی هم که در درجه بالاتری ازانتزاع بوجودآمده است، صدق می کند. بعنوان‌مثال بخاطرمیآوریم که هندسه ریمانی بعنوان یك طرح آماده ریاضی مورد استفاده نظریه جاذبه قرار گرفت. ولی نویسنده اخیرالذکر روشن می کند که امکان یك چنین‌مورد استفاده وسیعی که ریاضیات دربررسیهای دنیای واقع پیدا می کندبراین اساس است که ریاضیات ازخوداین جهان اخذ شده وتنها قسمتی ازاشکال ارتباطی واقعی مربوط‌بجهان را منعکس می کند وبخصوص **تنها بهمین علت است** که میتواند بطور کلی مورد مصرف پیدا کند. این حقیقت که بسیاری ازنظریه‌ها درداخل خود ریاضی وضمن‌تکامل آن بوجود میآید، این مطلب را تغییر نمیدهد. نظریه ها، در عین حال که بعنوان اشکال ممکنه واقعیت بوجود میآید بهیچوجه قرار دادی نیستند، زیرا ضرورتاً و در نتیجه منطقی که‌مربوط بموضوع آنهاست، بوجود میآید و بخصوص بهمین علت است که مورد مصرف واقعی پیدا می کند. نظریه‌های ریاضی درهرحال واقعیت رامنعکس می کنند واختلافشان تنها دراینست که این‌انعکاس دربعضی حالات مستقیم‌تراست و در حالات دیگر ازراه یك سلسله انتزاع و تشکیل مفاهیم وغیره انجام میگیرد.

۵ ـ از خصائص آخرین دورهٔ تکامل ریاضیات نه فقط اینست که انتزاعهای آن در درجات بالاتری قرار گرفته ، بلکه اینهم هست که موضوع آن بطور اساسی توسعه پیدا کرده و از کادر مفاهیم مقدماتی روابط کمی و اشکال فضائی خارج شده است .

البته اشکال مربوط بفضاهای چند بعدی و بی‌نهایت بعـدی ، آنگونه که از اشکال فضای واقعی معمولی (و نه از فضای انتزاعی ریاضی) می‌فهمیم ، نیستند ؛ ایـن فضاها معنا و مفهوم واقعی دارند و اشکال مشخصی از واقعیت‌را بصورت انتزاعی منعکس میکنند ، ولی فقط شباهتی با اشکال فضائی‌دارند و بهمین‌علت در مقایسه بافضای واقعی میتوان آنها را «شبه فضا» نامید . وقتی که ما ازفضای چند بعدی و اشکال‌واقع در آن صحبت می کنیم ؛ ضمناً بمفهوم فضا ، محتوی‌جدیدی میدهیم وبنابراین‌لازم است که بین دو مفهوم فضا : مفهوم‌کلی وانتزاعی فضا در ریاضیات ازیکطرف ومفهوم فضا بمعنای اشکال معمولی وجود ماده از طرف دیگر ، فرق اساسی قائل شویم .

برای اینکه نمونه دیگری از این‌مطلب که‌موضوع ریاضی از حد اشکال فضائی و روابط کمی (بمفهوم مقدماتی‌این‌کلمات) تجاوز کرده ، ذکر کنیم میتوان از اصول جدید منطق ریاضی نام برد که در اواخرقرن گذشته بوجود آمده واکنون بطوروسیعی تکامل پیدا کرده است . موضوع منطق ریاضی ، مطالعه درنوع و نتیجه گیریهای‌ریاضی است ، بعبارت‌دیگر منطق‌ریاضی دراین‌باره مطالعه می کند که با وسائل داده شده چه احکامی را میتوان ازمفروضات نتیجه گرفت . روش‌منطق ریاضی هم همان روشی‌است که خاص ریاضیات است یعنی موضوع مورد مطالعه‌اش‌را ازمحتویش کاملا جدامیکند و باین ترتیب بجای احکام ، فرمولها و بجای قوانین عقلانی ، قوانینی که بوسیلهٔ ایـن فرمولها معین میشود ، قرار میدهد . البته روابط بین مفروضات و نتایج ، روابط بین اصول و قضایا ، منجر باشکال فضائی وروابط کمی بمفهوم معمولی خود (و مثلا رابطه حجمی دویا چند مفهوم) نمیشود .

نمونه‌دیگری از این‌قبیل ، نظریه گروه است که‌میتوان ازآن‌بعنوان نظریه‌ای که‌درباره تقارن بصورت‌کلی آن مطالعه‌میکند ، نام‌برد . ولی تغییرتقارن بلورها ومثلا انتقال گوگرد ازشکل متوازی‌السطوح‌بشکل منشور بمعنی یك‌تغییر اساسی در کیفیت شیئی است . بنابراین نظریه گروه عبارتست از علم کمیـات و علم تعین و تشخص Détermination اشیاء ، منتهی‌آنچنان کمیات و آنچنان تعینی که تغییرآنها باعث تغییراساسی درخود شیئی میشود .

باین‌ترتیب توسعه‌موضوع ریاضیات منجر بتوسعه اساسی دومفهوم «روابط کمی» و «اشکال‌فضائی» شد ، به‌بینیم خطوط عمومی ومشخصه موضوع ریاضیات ، موضوعی که

تااین‌حد توسعه یافته ، کدام است ؟

اگر نخواهیم جواب این سئوال را فهرست‌وار بدهیم و کوشش کنیم کـه وارد ماهیت موضوع شده و آنچیزی را که خصیصه موضوع ریاضیات بوده و برای جوانب مختلف آن مشترك باشد ، معین کنیم ، میتوانیم‌جواب را در کتاب «ضددورینگ» پیدا کنیم . کافی است که علاوه برآنچه که نویسنده این کتاب در باره موضوع ریاضیات گفته ، آنچه را هم که درباره وسیلهٔ مطالعه آن یعنی انتزاع کامل شکل و رابطه از محتوی متذکرشده است ، در نظربگیریم . این انتزاع که خصیصه ریاضی‌است در عین حال موضوع آنرا هم تعریف میکند .

موضوع ریاضیات عبارت از اشکال وروابطی از واقعیت است که نسبت بمحتوی بی‌تفاوت باشد ، این بی تفاوتی تا آنجا پیش میرود که اشکال و روابـط از محتوی بکلی جدا شده و بصورت‌کلی درمیآید ، ولی‌درعین‌حال چنان واضح و دقیق‌است وروابط آنها چنان پرثمروغنی است که میتواند پایه‌واساس تکامل‌کاملا منطقی‌نظریه‌Théorie قرار گیرد .

اگراین روابط و اشکال را هم کمی (بمعنای‌کلی این کلمه) بنامیم ، میتوانیم بگوئیم‌که موضوع ریاضیات عبارتست از آن اشکال و روابط کمی که بصورت خالص درآمده است .

انتزاع بهیچوجه خاص ریاضیات نیست و در سایر علوم هم وجود دارد ، ولی علوم دیگر قبل از همه باین مسئله علاقمندند که طرحهای انتزاعی‌آنها با پدیده‌های معینی ساز گار باشد . از مهمترین مسائلی که برای علوم دیگر مطرح است ، اینست که سیستم مفاهیم موجود تا چه حد در پدیده های مفروض و معین مورد مصرف دارد و چگونه میتوان سیستم‌انتزاعی موجود راباسیستم مناسب‌تری تعویض کرد . ریاضیات، برعکس ، ضمن اینکه خواص‌کلی را از پدیده های مشخص کاملا جدا میکند ، خود این سیستمهای انتزاعی را هم بحالت‌کلی و انتزاعی مطالعه میکند ، بدون اینکه بحد مورد مصرف آنها درپدیده های مشخص جداگانه کار داشته باشد . میتوان گفت که نوعی مطلق بودن انتزاعها ، از خصائص ریاضی است .

مخصوصاً بهمین علت که اشکال مورد مطالعه ریاضیات نسبت بمحتوی خود بی اعتنا هستند ، خصوصیات اساسی ریاضیات یعنی تعقلی بودن و ضرورت منطقی آنرا معین میکند و باعث میشود که نتایج داخلی مفاهیم و تئوریهای ریاضی غیرقابل تغییربنظربرسد، همین بی‌تفاوتی‌نسبت بمحتوی است که نوع مورد مصرف ریاضیات را معین میکند . وقتی‌که ما بتوانیم یك مسئله عملی را بزبان ریاضی در آوریم خواهیم توانست با کنار گذاشتن تمام خصوصیات درجه دوم مسئله و با بکار بردن فرمولها و

نتیجه گیریهای کلی، بهدف مشخص خود برسیم . بنابراین انتزاع ، نیروی اصلی ریاضیات بوده وعملا ضروری است .

۶ ـ اگر حالا بقضاوت نویسنده «ضددورینگ» درباره ریاضیات بر گردیم متوجه میشویم که محتوی این قضاوت چقدر عمیق و پرمایه است و تا چه حد میتوان آنرا بسط داد . اگر می‌بینیم که این نویسنده با وجودیکه ریاضی‌دان نبود ، تجزیه وتحلیل عمیقی از پایه های این علم مینماید ، نه تنها باین علت است که او یك متفکر نابغه بود ، بلکه مهمتر از همه باین علت است که بمنطق فلسفهٔ علمی مسلط بود و آنرا برای روشن کردن ماهیت ریاضیات راهنمای خود قرار میداد . بنابراین نباید تعجب کرد که قبل ازاو ، هیچکس نتوانست یك‌چنین‌راه حل عمیق وصحیحی از این مسئله ارائه دهد ؛ بزرگترین ریاضی‌دانان هم نمی‌توانستند در یك‌چنین حجم فشرده‌ای باین موفقیت نائل آیند .

بهمین ترتیب بعدها نویسنده «دفاتر فلسفی» همچنان تجزیه وتحلیلی ازموضوع فیزیك بدست داد که برهمه تجزیه وتحلیلهای مشابهش برتری دارد.

این‌مطلب یکبار دیگر اهمیت ونیروی منطق فلسفهٔعلمی را ثابت میکند ، نشان میدهد که برای تسلط بریك‌علم کافی نیست که مطالب‌مختلف آنرا بدانیم ، حتی کافی نیست که خدمتگذارخلاقی برای این‌علم باشیم ، بلکه علاوه براینها لازم‌است که بروش کلی وصحیح، یعنی بمنطق فلسفه علمی مسلط باشیم . بدون این تسلط نتیجه گیریهای علم یا بصورت یك توده بی‌شکل بنظر میرسد و یا کاملا ازشکل میافتد و بجای اینکه درك صحیحی از علم بدست بیاوریم ، دچار تصورات غلط ماوراءِ الطبیعی و ذهنی Métaphysique ـ idéalisme در باره آن میشویم ؛ مثلا بسیاری از ریاضی دانانی که بمنطق فلسفهٔ علمی مسلط نیستند یا اصولا نمیتوانند در مسائل عمومی مربوط بعلم خودشان جهت‌یابی کنند و یا این مسائل را بکلی غیرصحیح بیان میکنند .[1]

۱ ـ مثلا تذکر این مطلب جالب توجه است که دو نفرازعلمای مشهور هندسه یعنی وبلن Veblène و وایتهد Waïthéd که هردو آمریکائی هستند در کتابشان بنام «اصول هندسه دیفرانسیلی» کوشش میکنند تعریفی برای هندسه پیدا کنند و بالاخره باین نتیجه میرسند که تعریف این علم ، ممکن نیست . مگر اینکه بگوئیم : «هندسه آنچیزی است که متخصصین آنرا هندسه مینامند .»

۹

قوانین تکامل ریاضیات

در خاتمه کوشش می کنیم که قوانین کلی تکامل ریاضیات را مختصراً تعیین نمائیم :

۱ ـ ریاضیات در یك دوره تاریخی و بوسیله یك ملت بوجود نیامده است ، بلکه محصول اعصار متوالی و نتیجه کار نسلهای زیادی است . همانطور که دیدیم نخستین مفاهیم و احکام ریاضی در دوره های خیلی باستانی بوجود آمد و بیش از دو هزار سال قبل بصورت سیستم مستحکمی درآمده بود . با وجود آنکه ضمن عبور از یك دوره به دوره دیگر، تغییراتی در ریاضیات بوجود میآید ، مفاهیم و نتیجه گیریهای آن (مثل قوانین حساب وقضیه فیثاغورث) بقوت خود باقی میماند . تئوریهای جدید شامل موفقیتهای قبلی هم هست ولی آنها را دقیق تر، کامل تر وکلی تر مینماید .

ضمناً از شرح مختصر تاریخی مذکور روشن میشود که تکامل ریاضیات تنها منجر باین نمیشود که قضایای جدید بطور ساده رویهم انبار شود ، بلکه منجر بتغییرات اساسی و کیفی در ریاضیات میشود . بنابراین تکامل ریاضیات بدوره هائی تقسیم میشود که عبور از یکی بدیگری، درست بمعنای تغییر اساسی و ریشه‌ای در موضوع و یا ساختمان این علم است .

۲ ـ روابط کمی واقعیت در همه زمینه‌های جدید خود ، حوزهٔ عمل ریاضیات را تشکیل میدهد ، ضمن اینکه مهمترین موضوع ریاضیات اشکال فضائی و روابط کمی (بطور ساده و همانگونه که مستقیماً از این کلمات فهمیده میشود) بوده وهنوز هم هست ، مفهوم ریاضی دادن بروابط و نسبتهای جدید براساس

مجموعه تصورات علمی که درباره فضا و کمیت داریم ، انجام میگیرد .

بالاخره جمع شدن نتایج ریاضی ، همانطور که ضرورتاً منجربدرجات جدیدی از انتزاع میشود و مفاهیم تعمیم دهندهٔ جدیدی بوجود میآورد ، همانطور هم منجر بتحلیل عمیق‌تری ازاصول ومفاهیم مقدماتی ریاضیات میشود .

همانطور که درخت بلوط در رشد نیرومندش ، شاخه های قدیمی را بوسیله قشرهای جدید ضخیم‌تر میکند ، شاخه های جدید ببارمیآورد ، بسمت بالاقد میکشد و بطرف پائین ریشه میدواند ، ریاضیات هم درتکامل خود، مصالح جدیدی برشته‌های موجود اضافه میکند ، رشته های جدیدی بوجود میآورد ، بطرف قلل جدید انتزاع بالا میرود و در اصول خود عمیق‌تر میشود .

۲ ـ موضوع ریاضیات عبارتست از اشکال و روابط حقیقی واقعیت ؛ ولی همانطور که نویسنده « ضددورینگ » میگوید ، برای اینکه این اشکال و روابط را بصورت خالص مطالعه کنیم لازم است که آنها را از محتویشان کاملا جدا نمائیم و این محتوی را بعنوان چیزی که مورد استفاده ما نیست ، بکناری بگذاریم . ولی شکل‌و رابطه‌خارج ازمحتوی وجود ندارد واشکال وروابط ریاضی هم نمیتوانند نسبت بمحتوی مطلقاً بی‌تفاوت باشند . بنابراین ریاضیات که بمناسبت ماهیت خود کوشش میکنداین جدائی را بوجود آورد بانجام امرمحالی دست میزند . **اینهم یکی از تضاد های اساسی در ماهیت ریاضیات است** که تظاهری از تضاد کلی مربوط بشناخت ، در مورد ریاضیات میباشد . انعکاس هرپدیده ، هرجنبه وهرعنصری ازواقعیت درذهن، آنرا عمیق‌تر و ساده‌تر میکند واز روابط عمومی طبیعت جدا میسازد . وقتی که مردم ضمن مطالعه خواص فضا باین نتیجه رسیدند که این فضا ، خواص هندسه اقلیدسی را دارد ، از نظر شناخت عمل بسیار مهمی انجام گرفت ولی در این شناخت‌هم اشتباهاتی وجود داشت . زیرا خواص حقیقی فضا ، ساده‌تر ، خلاصه‌تر و جدا از ماده در نظر گرفته شده بود . ولی بدون این عمل هم اصولا هندسه‌ای نمیتوانست وجود داشته‌باشد و بخصوص برزمینه همین انتزاع بود که تئوریهای جدید هندسی بوجودآمدومستحکم شده(خواه این‌انتزاع درداخل‌بررسیهای هندسی انجام گرفته باشد ، خواه ازراه مقایسه نتایج ریاضی با مفروضات جدید مربوط بعلوم دیگر).

از بین رفتن و بوجود آمدن دائمی تضاد مذکور ، در مرحله‌ای از شناخت که مرتباً بواقعیت نزدیك و نزدیك‌تر میشود، نیز ماهیت تکامل شناخت را نشان میدهد . البته ، دراین میان جنبه مثبت شناخت ، یعنی وجود عناصر حقیقت محض در آن ،

نقش تعیین کننده را برای شناخت بازی میکند ، شناخت روی یك منحنی صعودی بالا میرود ، نه آنکه بطور ساده با اشتباهاتی آمیخته باشد و درجای خود درجابزند . تغییر شناخت یعنی غلبه دائمی برعدم دقتها و محدودیتهائی که در آنست .

تضاد اساسی مذکور ، تضادهای دیگری رابدنبال دارد و ما این مطلب را ضمن مقابله کردن مفاهیم انفصال واتصال دیدیم (در طبیعت بین مفاهیم انفصال و اتصال خط فاصل مطلق وجود ندارد و تقسیم آنها در ریاضیات ضرورتاً مفاهیم جدیدی را بوجـود آورد که واقعیت را عمیق‌تر منعکس کرده ودرعین حال برنواقص داخلی نظریه های موجود ریاضی غلبه کرد) . درست بهمین ترتیب تضاد بین محدود ونامحدود ، مجرد و مشخص. شکل ومحتوی و غیره تظاهری از تضاد اساسی و درونی ریاضیات میباشد . اما تظاهر تعیین کننده تضاد ریاضیات دراینجاست که در عین حال که ریاضیات از موارد مشخص منتزع میشود ودور یك سلسله مفاهیم انتزاعی چرخ میخوردو خود را از تجربه وعمل کنار می کشد ، درعین‌حال تاجائی علم شناخته‌میشود (یعنی ارزش شناخت دارد) که برعمل تکیه داشته باشد و بعنوان ریاضیات عملی ازآب درآمده باشد ، نه ریاضیات خالص. اگر از زبان هگل Georg Wilhelm Friedrich Hegel بگوئیم : **ریاضیات خالص ، دائماً خودش را از نظر خالص بودن « نفی میکند » ؛ ریاضیات بدون این نفی نمیتواندمعنای علم‌داشته‌باشد ، نمیتواند تکامل‌یابدو نمیتواند برمشکلاتی که‌بدون تردیددرداخلش بوجود میآید غلبه کند .**

نظریه‌های ریاضی بصورت ظاهرخودبعنوان طرحهائی که برای نتیجه گیریهای مشخص ریخته شده است ، در مقابل محتوی قرار میگیرد ، درحالیکه همین ریاضیات بعنوان روش تنظیم قوانین کمی علوم طبیعی و بعنوان دستگاهی برای بعمل آوردن نظریه های آن و بعنوان وسیله حل مسائل علوم طبیعی وصناعت بکارمیرود . اهمیت ریاضیات خالص دردوران کنونی قبل ازهمه بسته بروش آنست .همانطور که موجودیت و تکامل هرروشی تنها براساس مورد مصرف آن و مربوط به مضمونی است که با آن سروکار دارد ، ریاضیات هم بدون کاربرد نه میتواند وجود داشته باشد ونه میتواندتکامل پیدا کند . در اینجا یکبار دیگر اجتماع ضدین دیده میشود : روش کلی بعنوان یك وسیله عمومی ، در مقابل موارد ومسائل مشخص قرار میگیرد ؛ در حالیکه خودش از تعمیم همین موارد مشخص بوجودآمده وموجودیت وتکامل وتایید آن تنها مربوط بحل همین مسائل مشخص‌است .

۳ ـ پراتیك اجتماعی ، در تکامل ریاضیات از سه‌جهت نقش تعیین کننده‌ای بازی میکند : اولا مسائل جدیدی درمقابل ریاضیات قرارمیدهد ، ثانیاً محرك تکامل آن درجهت معینی میشود وبالاخره صحت نتیجه‌گیریهای آنرا تصدیق میکند .

این مطلب بطریق کاملا روشنی در مورد بوجودآمدن آنالیز دیده میشود :اولا، بخصوص تکامل مکانیك و صناعت ، مطالعه روابط کمیات متغیر را بصورت کلی مطرح نمود . ارشمیدس با وجودیکه بآستانه حساب دیفرانسیل و انتگرال رسید درچهارچوب مسائل استاتیك Statique باقی ماند ؛ در حالیکه درزمان حاضر ، بخصوص بررسی حرکت بود که مفاهیم متغیرو تابع را بوجود آورد و باعث تنظیم آنالیر شد . نیوتون Neuton جز از طریق روش متناظر و مربوطه ریاضی نمیتوانست مکانیك را به پیش ببرد .

ثانیاً : بخصوص احتیاجات تولید اجتماعی بود که دانشمندان را وادار کرد تا روی همه این مسائل توقف کرده و آنها را حل نمایند . نه در دوران باستان و نه در اجتماع قرون وسطی یك چنین محرکی وجود نداشت. بالاخره این ازمشخصات آنالیز ریاضی است که نتیجه‌گیریهای‌آن درموقع بوجود آمدن وتولدشان متکی بعمل‌بود و تنها بهمین علت است که آنالیز ریاضی بدون اینکه تعریف دقیقی ازمفاهیم اساسی‌آن (متغیر ، تابع ، حد) بشود ، توانست تکامل پیدا کند (این تعاریف بعدها داده شد) . مورد مصرف آنالیز در مکانیك ، فیزیك و صناعت ؛ صحت و درستی آن را تأیید کرد .

آنچه گفته شد ، در مورد تمام دوره های تکامل ریاضیات‌صحیح است . ازهمان قرن ۱۷ ، فیزیك نظری ومسائل صناعت جدید همراه با مکانیك ، تأثیر مستقیم‌تری روی تکامل ریاضیات داشتند . مکانیك « ملاء یکپارچه » و سپس نظریهٔ میدان (انتقال حرارت ، الکتریسیته ، مغناطیس ، میدان جاذبه) باعث تکامل نظریه معادلات دیفرانسیل بمعادلات با مشتقات جزئی شد . بوجود آمدن نظریهٔ مولکولی وبطور کلی فیزیك آماری ، که آغازآن از اواخر قرن گذشته شروع میشود، محرك جدی برای تکامل نظریهٔ احتمالات و بخصوص نظریهٔ جریانهای اتفاقی بود . نظریه نسبیت نقش تعیین کننده‌ای درتکامل هندسهٔ ریمانی وروشهای تحلیلی (آنالیتیك) آن وتعمیم های آن بازی کرد.

در زمان ما تکامل نظریه های جدید ریاضی مثل آنالیز فونکسیونل Analyse fonctionnelle و غیره بوسیلهٔ مسائل مکانیك کوانتائی و الکترودینامیك Electrodynamique و بوسیلهٔ مسائل صناعت مربوط بمحاسبه و سؤالات آماری

فیزیك وصناعت وغیره وغیره تحریك میشود . فیزیك وصناعت نه تنها مسائل جدیدی در مقابل ریاضی قرار میدهد و نظر آنرا بموضوعات جدیدی منعطف میکند ، بلکه رشته هائی از ریاضیات را که برای پیشرفت فیزیك وصناعت لازم‌است و درآغاز تا حد زیادی در داخل خود ریاضیات‌بوجود آمده‌است (مثل‌هندسهٔ ریمانی) بیدار میکنند . خلاصه برای اینکـه علم ، بطور شایسته ای تکامل یابد ، نه تنها بایستی در آستانهٔ حل‌مسائل جدیدی قراربگیرد بلکه باید احتیاجات تکامل اجتماع نیزحل این‌مسائل را ضروری بشناسد .

در دوران اخیر نظریه های زیادی در ریاضیات بوجود آمده است ولی تنها آن نظریه هائی تکامل پیدا میکنند و با استحکام وارد علم میشود که یا در علوم طبیعی وصناعت مورد مصرف پیدا کنند ویا در نظریه هائی که چنین مورد مصرفهائی دارد نقش تعمیم دهنده عمده‌ای داشته باشد . ضمناً سایر نظریه ها بحال سکون باقی میماند ، مثل بعضی ازهندسه های خالص (هندسه های غیر دزارگی وغیرارشمیدسی) که مورد مصرف اساسی پیدا نکردند .

نتیجه‌گیریهای ریاضی صحیح و واقعی اند ، ولی پایه و تکیه‌گاه اساسی این صحت در تعاریف و اصول کلی و یا در دقت ظاهری اثبات این نتیجه‌گیریها نیست ، بلکه این تکیه‌گاه در مـورد مصرف واقعی آنهـا و در تحلیل آخر در عمل بدست میآید .

بطورکلی ، تکامل ریاضیات را قبل از همه باید نتیجهٔ تأثیر متقابل سه عامل دانست ؛ اولا منطق موضوع ریاضی (که درمنطق درونی ریاضیات منعکس شده است)، ثانیاً تأثیر تولید در ریاضیات و ثالثاً روابط ریاضیات با علوم طبیعی . این تکامل ازراه پر پیچ وخم مبارزهٔ اضداد عبور میکند وباعث تغییرات اساسی هم در مضمون ریاضیات و هم در فرمهای اساسی آن میشود . تکامل ریاضیات بسته بمضمونی است کـه در موضوع‌آن وجود دارد ، در تحلیل آخر محرك اصلی این تکامل احتیاجات تولیدی است .

چنین است قانون اساسی تکامل ریاضیات .

البته نباید فراموش کرد که صحبت تنها بر سر قانون اساسی است و خود همین رابطه ریاضیات باتولید هم بغرنج وپیچیده است . ازآنچه دربالا گفته شد روشن میشود که ساده لوحی است اگر بخواهیم بوجود آمدن هر نظریه ریاضی معینی را مستقیماً از «قانون تولید » نتیجه بگیریم . ریاضیات هم مانند همهٔ علوم دارای استقلال‌مربوطه ومنطق داخلی مربوط بخودش (که بطوریکه گفتیم انعکاسی‌ازمنطق فلسفه‌علمی‌است)

یعنی قانونی که مربوط بموضوع آنست ، میباشد .

۴ـ ریاضیات نه تنها همیشه تحت تأثیر اساسی تولید اجتماعی است ، بلکه در عین حال ازمجموعه شرایط اجتماعی متاثر میشود . پیشرفت درخشان ریاضیات در دورهٔ اوج یونان باستان ، موفقیتهای جبر در دوران رونسانس Renaissance درایتالیا ، تکامل آنالیز در دورهٔ پس از انقلاب انگلستان ، موفقیتهای ریاضیات در فرانسه در دورانی که از انقلاب فرانسه شروع میشود ، همهٔ اینها بطور متقاعد کننده ای ارتباط جدا نشدنی پیشرفت ریاضیات را با پیشرفت عمومی اجتماع درزمینهٔ صناعت، فرهنگ وسیاست نشان میدهد .

همین مطلب را بروشنی دربارهٔ تکامل ریاضیات در روسیه هم میتوان دید . مستقل شدن مکتب ریاضیات روسیه را ، که از زمان لباچوسکی ، استروگرادسکی Ostrogradsky و چبیشف Tchebichef شروع میشود ، نمیتوان از پیشرفت اجتماع روسیه بطور کلی جدا نمود . دورهٔ لباچوسکی دورهٔ پوشکین و گلینکا و دکابریستها است و شکفتگی ریاضیات هم شکفتگی یکی از عناصر اجتماع را نشان میدهد .

تاثیر تکامل اجتماع در دورهٔ بعد از ۷ نوامبر، از اینهم بیشتر متقاعد کننده است . زیرا دراین دوره است که مطالعات پراهمیت وعمیق ، با سرعت حیرت انگیز، یکی پس از دیگری و درتمام جهات : درنظریهٔ مجموعه ها ، توپولوژیTopologie، نظریهٔاعداد ، نظریهٔ احتمالات ، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل ، آنالیزفونکسیونل، جبر وهندسه انجام گرفت .

بالاخره ، ریاضیات همیشه تحت تاثیر جدی طرز تفکر Idéologie بوده و هنوز هم هست ، محتوی عینی ریاضیات هم ، مثل همهٔ علوم ، بوسیلهٔ ریاضی دانان و فلاسفه ، درچهارچوب این ویاآن طرزتفکر درك وتفسیرمیشود .

خلاصه ، همیشه محتوی عینی علم ، دریك شکل ایده ئولوژیك جاداده میشود اجتماع ومبارزهٔ اضداد ، یعنی تضاد محتوی عینی با شکل ایده ئولوژیك ؛ مثل سایر علوم نقش با اهمیتی درتکامل ریاضیات دارد .

مبارزه‌بین‌فلسفه‌علمی که بامحتوی‌عینی‌علم‌منطبق‌است‌و فلسفه‌ذهنی Idéalisme که در مقابل این محتوی قرارداشته ومفهوم‌آنرا مقلوب میکند درتمام تاریخ ریاضیات جریان دارد ، این مبارزه در یونان باستان هم‌وجود داشت ، جائی که در مقابل فلسفه علمی طالس، دموکریت وسایرفلاسفه‌ای که ریاضیات یونانی را بوجودآوردند ، فلسفه ذهنی فیثاغورث ، سقراط و افلاطون وجود داشت . با تکامل رژیم بردگی ، قشربالای

اجتماع ازشرکت در تولید جدامیشد ، بطوریکه آنراکارطبقه پست میدانستند وهمین مطلب شکاف بین علم «خالص » و عمل را بوجود آورد : آنچه که برای یك فیلسوف واقعی قابل‌قبول بود ، تنها هندسه‌کاملانظری بود . مثلابعنوان یك نمونه‌کاملامشخص میتوان ذکر کرد که افلاطون مطالعه بعضی‌منحنیهای مکانیکی وحتی مقاطع‌مخروطی را خارج از هندسه بشمار میآورد ، زیرا این منحنیها « ایده های جاودانی و روحانی نیستند» و «مستلزم استفاده از یك‌حرفه مبتذل‌تری میباشند» .

نمونه درخشان مبارزه فلسفه علمی علیه فلسفه ذهنی . در ریاضیات ، عبارتست ازفعالیت‌لباچوسکی که‌درك علمی‌ریاضیات را درمقابل‌نظریه ذهنی‌کانتیستها Kantistes طرح کرد و از آن دفاع نمود .

بطورکلی علمی بودن از سنتهای مکتب ریاضیات روسیه است . مثلا چبیشف روی اهمیت اساسی و تعیین کننده عمل تکیه میکند و لیاپونوف Liapounov سبك مکتب ریاضی روسیه را با جملات جالب زیرشرح میدهد : « بررسی مفصل مسائل ، هم از نقطه نظرمورد استعمال آنها و هم بررسی مفصل مشکلاتی که این مسائل بوجود میآورد و در نتیجه این بررسی، کشف روشهای جدید و بالا بردن‌آنها تا سطح علم . و سپس تعمیم نتایجی که بدست‌آمده وازاین راه بدست آوردن نظریه کم‌وبیش عمومی». وقتیکه تعمیم و انتزاع بخودی خود انجام نگیرد و با مصالح مشخص سروکار داشته باشد ، وقتیکه قضیه و نظریه ، نه بخودی‌خود ، بلکه در ارتباط‌کلی با علم بوجودآید، در تحلیل آخر منجر بعمل Pratique میشود و این همانچیزی است که در حقیقت هم مهم است وهم آینده دارد . [۱]

هدف دانشمندان بزرگی مثل گوس Charles Frédéric Gauss و ریمان Riemann هم همین بود .

با تکامل سرمایه داری دراروپا ، نقطه نظر علمی که انعکاسی ازطرزتفکرپیشرو بورژوازی تازه‌بدوران‌رسیده‌قرن‌شانزدهم‌تاابتدای‌قرن نوزدهم‌بود ، جای خودرا بنظریات ذهنی دارد . مثلا کانتورCantor (۱۸٤٦ - ۱۹۱۸) که نظریه مجموعه های بی‌نهایت را طرح کرد ، مستقیماً بخدا متوسل میشود و میگوید که وجود مطلق مجموعه های بی‌نهایت در عقل کل یعنی عقل مربوط بخدا میباشد. پوانکاره poincaré ریاضی‌دان

---

۱ ـ درك این مطلب که رشته‌های مختلف ریاضیات باهمو با علوم طبیعی وعمل روابط نزدیك و ضروری دارد ، نه فقط از اینجهت که درباره خود ریاضیات نقطه نظر صحیحی داشته باشیم لازم است ، بلکه برای اینکه دانشمندان بتوانند در انتخاب راه و موضوع مورد مطالعه‌شان جهت‌یابی کنند، نیزاهمیت فوق‌العاده‌دارد .

بزرگ فرانسوی که دراواخر قرن ۱۹ واوائل قرن بیستم میزیست نظریه ذهنی کنوانسیونالیسم Conventionalisme را پیش کشید که بنا به آن ریاضیات عبارت از قراردادهائی است که برطبق آنهامیتوان شرح تجربیات را راحت تربیان کرد. مثلاطبق نظریه پوانکاره اصول هندسه اقلیدسی چیزی جزیك سلسله قرارداد نیست واهمیت آنها بعلت تطبیق آنها با واقعیت نیست ، بلکه بجهت سادگی و راحتی آنهاست ، پوانکاره میگوید از قانون انتشار مستقیم نور در فیزیك زودتر میتوان صرفنظر کرد تا ازهندسه اقلیدسی. ولی این نقطه نظر با تکامل نظریه نسبیت رد شد واز تطبیق کلی نظریه نسبیت با افکار علمی لباچوسکی وریمان به این نتیجه رسیدند که با همه «سادگی» و «راحتی» که هندسه اقلیدسی دارد ؛ هندسه واقعی فضا ، هندسه اقلیدسی نیست .

برزمینهٔ مشکلاتی که در نظریهٔ مجموعه ها بوجود آمد و بخاطر احتیاجی که مفاهیم اساسی ریاضیات بتجزیه وتحلیل داشتند، در اوایل قرن بیستم بین ریاضی‌دانان جریانهای فکری مختلفی بوجود آمد ؛ اتفاق در درك محتوی ریاضیات از بین رفت و ریاضی دانان مختلف نه تنها اصول کلی را بطرق مختلف بررسی میکردند (اختلافی که قبلا هم وجود داشت) ، بلکه حتی مفهوم واهمیت نتایج واستدلالهای مشخص جداگانه را هم بطرق مختلف ارزیابی مینمودند. نتایجی که ازنظرعده‌ای دارای مفهوم ومحتوی بود ، ازنظر بعضی دیگر بی مفهوم وبی معنا اعلام میشد ؛ جریانهای ذهنی وغیرعلمی « اصالت منطق » logitisme ، « اشراق » Intuitionisme ، « اصالت شکل » formalisme وغیره بوجودآمد .

طرفداران اصالت منطق تاکید میکنند که مجموعهٔ ریاضیات نتیجه‌ای است از مفاهیم منطق . اشراقیون منشاء ریاضیات را دراشراق می بینند و تنها چیزهائی را که از طریق اشراق قابل درك است مفهوم میدانند . باین ترتیب آنها بکلی منکر اهمیت نظریه کانتور دربارهٔ مجموعه‌های بینهایت میشوند . ازاینهم بالاتر، اشراقیون حتی منکر مفهوم ساده قضیه‌ای میشوند که طبق آن هرمعادلهٔ جبری درجه n ام دارای n جواب است . برای آنها تا زمانی که نتوان ریشه های عدی معادله را حساب کرد ، این حکم معنائـی ندارد . باین ترتیب نفی کامل مفهـوم عینی ریاضیات ، اشراقیون را بابتذال میکشاند بطـوریکه قسمت مهمی از موفقیتهای ریاضی را « بدون مفهوم » میدانند . متعصب ترین آنها تا آنجا پیش میروند که میگویند بتعداد ریاضی دانان ، ریاضیات وجوددارد .

هیلبرت Hilbert بزرگتریـن ریاضی دان ابتدای قرن ما بگمـان خود برای نجات ریاضیات ازچنین حملاتی ، اقداماتی را شروع کرد . عصارهٔ افکار هیلبرت

باینجا منجر میشد که نظریه‌هارا باعمالی تبدیل کنند که صرفاً جنبهٔ فرم داشته و برطبق قواعدی که ازقبل تعیین شده روی علامات انجام شود. اینطور حساب میشد که با چنین برداشتی که کاملا مربوط بفرم است همهٔ مشکلات از بین خواهد رفت زیرا در اینصورت موضوع ریاضیات عبارت از علامات و قوانین مربوط بآنها و بدون هرگونه ارتباطی با مفهوم آنها خواهد بود. و این هم عبارتست ازفرمالیسم در ریاضیات. طبق گفته براور Brauer اشراقی: برای فرمالیست حقیقت ریاضی روی کاغذ است، درصورتیکه برای اشراقی این حقیقت درمغز ریاضی دان وجود دارد.

درك این مسئله مشکل نیست که هیچیك از این دو دسته محق نیستند زیرا ریاضیات وهمهٔ آنچه که درباره‌آن روی کاغذ نوشته میشود و آنچه که ریاضی‌دان فکر میکنند، انعکاسی از واقعیت‌است و درستی و حقیقت ریاضی هم ناشی از آنست که با واقعیت عینی تطبیق میکند؛ همهٔ این‌جریانات باجدا کردن ریاضیات ازواقعیت مادی بفلسفه ذهنی وغیر علمی کشانده شدند.

افکار هیلبرت در اثر تکامل خود دچار شکست شد. ریاضی دان اطریشی گدل guedel ثابت کرد که حتی حساب را، آنطور که هیلبرت خیال میکرد، نمیتوان کاملا بقالب‌فرم درآورد. نتیجه‌گیریهای گدل منطق درونی ریاضیات را بروشنی نشان داد، منطقی که اجازه نمیدهد هیچیك از رشته های ریاضی را با محاسباتی که درقالب فرم باقی مانده‌است، بآخر برسانیم. دستگاه تکمیل‌شده علامات واعمال مربوط بآنها حتی نتوانست کار سلسله اعداد طبیعی و بی‌نهایت را بپایان‌برساند وباین ترتیب آنچه‌را که‌نویسنده کتاب «ضددورینگ» درجملات‌زیر بطورکلی‌بیان کرده‌است، بطریق ریاضی ثابت شد:

« بینهایت تضاد است . . . . . از بین بردن این تضاد بمعنای از بین بردن خود بینهایت‌است ».

هیلبرت میخواست بینهایت ریاضی را درکادرطرحهای محدود جا بدهد و باین وسیله همه اضداد ومشکلات را حل کند واین هم غیرممکن بود.

ولی در شرایط موجود اجتماعی، نه تنها کنوانسیونالیسم، اشراق، فرمالیسم وجریانات شبیه آنها ازبین نرفتند، بلکه انواع جدید نظریات ذهنی ریاضی هم بآنها اضافه گردید. نظریه مربوط بتجزیه و تحلیل منطقی اصول ریاضی بطور جدی مورد استفاده بعضی از انواع جدید فلسفه ذهنی قرارگرفت. در زمان حاضر فلسفه ذهنی بهمان اندازه که از فیزیك استفاده میکنند، از ریاضی و بخصوص منطق ریاضی هم

استفاده میکنند و بهمین علت است که مسئله درك اصول ریاضی اهمیت زیادی کسب نموده‌است .

باین‌ترتیب مشکلاتی که درراه تکامل ریاضیات وجود داشت ، درشرایط موجود اجتماعی یك بحران فکری بوجود آورد ، اساس این بحران شبیه ببحرانی است که در فیزیك هم بوجود آمده بود . البته این بحران این معنی را نمیدهد که تکامل ریاضیات در کشورهائی که دارای این شرایط اجتماعی هستند ، بکلی متوقف شده‌است. یك عده ازدانشمندانی که درموضع کاملا ایده‌آلیستی قراردارند، گاهی موفقیتهای برجسته ومهمی درحل مسائل مشخص ریاضی وتکامل نظریه‌های جدیدبدست میآورند، دراینمورد کافی‌است که به تکامل درخشان منطق ریاضی اشاره کنیم .

عیب اساسی نظریات منتشره دراینگونه کشورها دربارهٔ ریاضی ، مربوط بفلسفه ذهنی وماوراء الطبیعه آنست : عیب‌اصلی دراینجاست که ریاضیات‌را جدا ازواقعیت در نظر میگیرند و باین مطلب که تکامل ریاضیات یك تکامل حقیقی ورئال Rèal است بی‌توجهند . طرفداران اصالت منطق ، اشراق ، فرمالیسم و سایر جریانات شبیه بآنها هر کدام یکی ازجنبه های ریاضیات را که مربوط بمنطق یا روشنی اشراقی و یا دقت صوری و غیره است جدا کرده و من غیر حق دربارهٔ آن مبالغه میکنند ، بآن مفهوم مطلق میدهند ، آنرا ازواقعیت جدا مینمایند وبا این عمل خود مجموعه ریاضیات را تحت‌الشعاع آن قرار میدهند و از نظرمیاندازند ، بخصوص بعلت همین یکطرفه بودن کار آنهاست که هیچیك از این جریانات ، با همه دقت و عمقی که در نتیجه گیریهای جداگانه آنها وجود دارد ، نمیتوانند بدرك صحیح ریاضیات نائل شوند . فلسفه علمی و غیرذهنی (برعکس‌جریانات‌مختلفی که رنگ ذهنی وماوراء الطبیعی دارند) ریاضیات را مثل همه علوم دیگر در مجموعه خود وهمانطور که هست ، با همه غناوپیچیدگی که در روابط و تکامل آن وجود دارد ، مورد بررسی قرار میدهد و بخصوص از آنجا که فلسفه غیرذهنی میکوشد تا همه غنا وپیچیدگی روابط علم را با واقعیت درك کنند و همه پیچیدگی تکامل آنرا (از تعمیم ساده تجربه تا تجردکامل و دوباره از تجرد تا عمل) ، بفهمد و بخصوص از آنجا که در برداشتهای خود همیشه محتوی عینی علم و کشفیات جدید آنرا درنظرمیگیرد، تنها فلسفه‌کاملا علمی است که مارا بدرك صحیح علم بطورکلی و درحالت خاص ریاضیات راهنمائی میکند .

فصل دوم

آنالیز

بقلم :

م. ا. لاونتیف ـ س. م. نیکولسکی

قسمت‌اساسی مقدمهٔ این فصل را ب . ن . دلن Délon نوشته است .

۱

مقدمه

بوجود آمدن روابط تولیدی جدید ، یعنی نطفه های سرمایه داری که دراواخر قرون وسطی بتدریج جانشین رژیم فئودالی میشد ، همراه با کشفیات و بررسیهای بزرگ جغرافیائی بود. درسال ۱۴۹۲ کریستف کلمب Christophe - Colomb براساس فکر کرویت زمین «دنیای جدید» را کشف کرد . کشف کلمب حدود دنیائی را که تا آنزمان شناخته شده بود وسعت داد و درافکار بشرتحولی بوجود آورد . در اواخر سالهای ۱۴۰۰ و ابتدای سالهای ۱۵۰۰ لئوناردداوینچی ، را فائل Raphaël ومیکل آنژ Michel Ange نقاشان زبردست و اومانیست Humaniste ، بتجدید حیات هنر پرداختند . در سال ۱۵۴۳ اثر کوپرنیک Nicolas _ Copernic بنام «درباره گردش دوایرفلکی» منتشر شد که سیمای علم نجوم Astronomie را بکلی تغییرداد ، در سال ۱۶۰۹ کتاب «نجوم جدید» کپلر Képler منتشرشد که حاوی قوانین اول ودوم حرکت سیارات بدور خورشید بود ، در سال ۱۶۱۸ کتاب او بنام «هم آهنگی جهان» که حاوی قانون سوم حرکت سیارات بود منتشرشد . گالیله Galilée با مطالعه آثار ارشمیدس و انجام تجربیات شجاعانه‌ای ، پایه های مکانیك جدیدی‌را گذاشت که برای صناعتی که تازه‌بوجودمیآمد کاملا ضروری بود . درسال ۱۶۰۹ گالیله باتلسکوپ ناقص و کوچکی که خودش‌ساخته بود آسمان شبانه را مشاهده کرد: یك نظراز درون تلسکوپ‌کافی بود که کرات‌سماوی ذهنی ارسطو Aristote و جزم Dogme مربوط بکامل‌بودن اجسام سماوی را خراب کند. بنظرمیرسید که سطح‌ماه پوشیده از کوههاست وبوسیلهٔ دهانه‌آتشفشان‌آبله گون

شده است ، زهره صوری شبیه بماه بخود میگرفت . مشتری با چهار قمرهمراه بود که بدور او میچرخید و نمونه کوچکی از دستگاه شمسی را بدست میداد . معلوم‌شد که کهکشان از ستارگان جداگانه‌ای تشکیل شده است و برای نخستین بار باشگفتی تمام ، دوری فوق‌العاده ستارگان احساس شد . هرگز یك اکتشاف علمی یك چنین تاثیری روی جهان متمدن نگذاشته بود .[۱]

تکامل کشتیرانی بنقاط دوردست وبررسیهای نجومی که برای چنین کشتیرانی لازم بود ، همچنین تکامل صناعت جدید و همراه با آن تکامل مکانیك Mécanique ایجاب میکرد که درجستجوی وسائلی برای حل، مسائل مطروحه جدید ریاضی‌باشند ؛ تازگی این مسائل بیشتردراین بود که قوانین حرکت رابمفهوم وسیع این‌کلمه درمعرض مطالعه ریاضی قرارمیداد .

راحتی وسکون با طبیعت ناسازگاراست . همانطور که یکی دانشمندان‌آلمانی متذکر میشود تمام طبیعت از کوچکترین‌ذرات آن گرفته تا بزرگترین اجسام درحال بوجود آمدن و نابودی دائمی ، دریك جریان همیشگی و درحرکت و تغییرخستگی ناپذیری بسرمیبرد . هرعلم طبیعی ، در تحلیل آخر این و یا آن جنبه ، این ویا آن شکل حرکت را مطالعه میکند . آنالیز ریاضی قسمتی از ریاضیات است که‌روشهائی برای‌بررسی کمی‌جریانهای مختلف‌تغییروحرکت و رابطه بین‌بعضی‌از مقادیر را بامقادیر دیگر بدست میدهد . اتفاقی نیست که آنالیز ریاضی در دوره‌ای بوجود آمد که تکامل مکانیك ونجوم (که بخاطرمسائل مربوط بصناعت و کشتیرانی تحریك شده بود) منجر بانباشته شدن مشاهدات واندازه گیریها وفرضیات زیادی‌شد وهمراه باآن علم راببررسی کمی ساده‌ترین اشکال حرکت کشاند .

نام«آنالیز بی‌نهایت کوچکها» Analyse infinitésimale مطلبی‌درباره موضوع مطالعه آن بدست نمیدهد، بلکه روی‌روشی که دراین‌قسمت از ریاضیات بکار میرود ، تکیه میکند . صحبت برسرروش خاص ریاضی بی‌نهایت کوچکها و یا بصورت امروزی آن صحبت برسرروش حدود است . ما در اینجا چند مثال نمونه که درآنها روش‌حدود بکار رفته است ، ذکر میکنیم و سپس در قسمتهای‌بعدی ، مفاهیم لازم را بطور دقیق توضیح خواهیم داد :

مثال ۱ـ همانطور که گالیله بطور تجربی ثابت کرد ، مسافت S که یك‌جسم در زمان t ضمن سقوط آزاد در خلاء ، طی‌میکند بوسیله فرمول زیر بیان میشود :

۱ـ دراین قسمت ازمقاله عالی‌آکادمیسین س . ای . واویلوف Wavilov بنام «گالیله» (چاپ ۱۹۵۲) استفاده اساسی شده است .

$$S=\frac{g\cdot t^{۲}}{۲} \qquad (۱)$$

(g مقداری‌است ثابت‌وبرابر با ۹٫۸۱ متربرثانیه‌برثانیه)[۱] . سرعت جسم‌سقوط کننده درهریك از نقاط مسیرش چقدر میشود ؟

فرض‌کنیم که جسم درلحظه t از نقطه A عبور کند ، به‌بینیم پس از فاصله زمانی‌کوتاهی باندازه Δt ، یعنی‌از زمان t تا $t+\Delta t$ چه اتفاقی میافتد ؟ مسافت طی شده نموی مانند ΔS بدست‌میآورد ، مسافت قبلی $S_۱=\frac{g\cdot t^۲}{۲}$ و مسافت پس از $t+\Delta t$ چنین خواهدبود :

$$S_۲=\frac{g\cdot(t+\Delta t)^۲}{۲}=\frac{g\cdot t^۲}{۲}+\frac{g}{۲}(۲t\Delta t+\Delta t^۲)$$

و ازآنجا نمو مسافت بدست میآید :

$$\Delta S=S_۲-S_۱=\frac{g}{۲}(۲t\cdot\Delta t+\Delta t^۲)$$

این‌نمو عبارتست ازمسافت طی شده درفاصلهٔ زمانی از t تا $t+\Delta t$. برای پیدا کردن سرعت متوسط در قطعه راه ΔS باید ΔS را بر Δt تقسیم‌کنیم :

$$V_m=\frac{\Delta S}{\Delta t}=g.t+\frac{g}{۲}\Delta t$$

اگرΔtرا بسمت صفر میل‌دهیم این‌سرعت‌متوسط بسرعت حقیقی‌نقطه Aمرتباً نزدیك تر میشود . ازطرف دیگر می بینیم‌که جملهٔ دوم سمت راست تساوی اخیر با کوچك شدن Δt بسمت صفر میل میکند بطوریکه V_m بسمت مقدار $g.t$ میل مینماید‌که معمولا آنرا چنین مینویسند :

$$V=\lim_{\Delta t\to ۰}V_m=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to ۰}(g.t+\frac{g}{۲}\Delta t)=g\cdot t$$

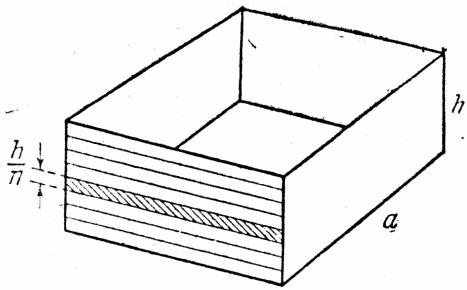
بنابراین $g.t$ عبارتست ازسرعت حقیقی جسم درلحظه t.

مثال ۲ـ تا لبه مخزنی که‌کف مربع شکل‌آن بضلع a و دیوارهای عمودی

---

۱ ـ فرمول (۱) را امروزازقوانین عمومی مکانیك نتیجه میگیرند ، ولی از نظرتاریخی این فرمول بخصوص ازطریق تجربی بدست آمده و جزئی ازتجربیاتی‌است که بعدها منجربه‌این قوانین عمومی شده است .

آن بارتفاع h است ازآب پر شده است (شکل۱) آب با چه نیروی‌کلی بردیوارهای مخزن فشار میآورد ؟



(شکل ۲)

سطح دیواره را به n قشر افقی بارتفاع $\frac{h}{n}$ تقسیم میکنیم . بطوریکه معلوم است ، فشار درهر نقطهٔ ظرف مساوی با فشار ستون مایعی است که در بالای آن قرار گرفته‌است . بنابراین فشار درکرانهٔپائینی‌هریك ازقشرها (برحسب واحد مربوطه) بترتیب برابر با : $\frac{h}{n}$ و $\frac{۲h}{n}$ و $\frac{۳h}{n}$ و . . . . . . و $\frac{(n-۱)h}{n}$ و h خواهد بود .

اگر فشار را در دوکرانه هر قشر ثابت بگیریم ، مقدار تقریبی نیروی P را بدست خواهیم آورد . بنابراین مقدار تقریبی P برابرخواهدبود با :

$$P \# \frac{ah}{n} \cdot \frac{h}{n} + \frac{a.h}{n} \cdot \frac{۲h}{n} + \cdots + \frac{a.h}{n} \cdot \frac{(n-۱).h}{n} + \frac{a \cdot h}{n} \cdot h$$

$$= \frac{ah^۲}{n^۲}[۱+۲+\cdots\cdots+(n-۱)+n)]$$

$$= \frac{ah^۲}{n^۲} \cdot \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{a \cdot h^۲}{۲}(۱+\frac{۱}{n}) .$$

برای اینکه مقدار این نیرو را بدست بیاوریم ، با بزرگ کردن n ، بدنه مخزن را بقشرهای باریکتر و باریکتری تقسیم میکنیم ، با بزرگ شدن n مقدار $\frac{۱}{n}$ در فرمول اخیر کوچك و کوچکتر میشود و درحد ، فرمول دقیق زیر را خواهیم داشت :

$$P = \frac{a.h^۲}{۲}$$

اسلوب استفاده از حد ساده وچنین است : برای اینکه مقداری را معین کنیم ، ابتدا خود آنرا بدست نمیآوریم ، بلکه تقریبی ازآنرا معین میکنیم . ضمناً ، نه یك تقریب ، بلکه یك رشته متوالی از تقریبها که مرتباً دقیق و دقیقتر میشود ، میسازیم سپس از مشاهده این رشته تقریبها یعنی ازمشاهدهٔ سیر تقریب ، مقدار دقیق کمیت را معین مینمائیم . در حقیقت به کمك اسلوبی که با منطق فلسفه علمی Dialectique کاملا تطبیق میکند، هرچیزپایدار وثابت بعنوان نتیجه یك سیر تکاملی ویك حرکت شناخته میشود .

این اسلوب ریاضی در نتیجه فعالیت جدی نسلهای بسیار روی مسائلی که از راههای ساده حساب ، جبر و هندسه مقدماتی غیر قابل حل بود ، بوجود آمد .

به‌بینیم مسائلی که حل آنها باعث بوجود آمدن مفاهیم آنالیز شد ، کدامند و راه حل این مسائل چگونه بدست آمد ؟

ریاضی‌دانان سالهای ۱۶۰۰ بتدریج کشف کردند که بسیاری از مسائل مربوط بمطالعه انواع‌مختلف حرکت وبسیاری ازمسائل مربوط بروابط کمیاتی با کمیات‌دیگر و همچنین بعضی مسائل‌هندسی که قبلا غیر قابل حل بود ، بدو دسته تقسیم میشود : روشن‌ترین و ساده‌ترین مسائل نوع اول چنین است : مسئله پیدا کردن سرعت‌حرکت غیریکنواخت در لحظه مفروض ومسائل شبیه آن‌درباره سرعت کمیات متغیر وهمچنین مسئله مربوط برسم مماس بر منحنی . این‌مسائل (که اولین مثال ماهم جزو آنهاست) منجربرشته‌ای از آنالیزشد که نام «حساب دیفرانسیل» Calcul différentiel را بخود گرفت . از ساده‌ترین نمونه‌مسائل‌نوع‌دوم میتوان جستجوی سطح اشکال منحنی‌الخط، پیدا کردن مسافتی را که ضمن حرکت غیریکنواخت پیموده شده و بطورکلی یافتن نتیجه عمل کمیتی راکه دائماً درتغییراست ، نام برد . (دومین‌مثال ما که قبلا ذکر کردیم جزو این دسته است) . این دسته مسائل منجر برشته دیگری از آنالیز بنام «حساب انتگرال» Calcul intégral شد . باین ترتیب دونوع مسائل اساسی و متمایز بوجود آمد : مسائل مربوط‌بمماس ومسائل مربوط به تربیع Quadrature .

در این فصل مفصلا شرح خواهیم داد که چه افکاری باعث حل هردو نوع این مسائل شد ، در این‌باره بخصوص قضیه نیوتون Newton ولایپ نیز Leibniz مهم‌است که برحسب آن مسئله‌مربوط به تربیع درحقیقت عکس مسئله مربوط به مماس‌میشود برای حل مسئله مربوط به‌مماس ومسائلی که‌بآن منجرمیشود آلگورتیم Algorithme (= روش‌کلی) محاسبه‌ای‌راحت وکاملاعمومی یعنی‌روش‌مشتقات ، روش‌دیفرانسیل گیری، پیداشد که ما را دانسته وآگاهانه Conscient بحل مسئله راهنمائی میکند.

تاریخ بوجود آمدن وتکامل آنالیز ونقشی که هندسه تحلیلی (که بوسیله‌دکارت بوجود آمد) درباروری آن بازی کرد در فصل اول شرح داده شد. دیدیم که در نیمه دوم سالهای ۱۶۰۰ و نیمه اول سالهای ۱۷۰۰ درمجموعه ریاضیات تغییرات‌اساسی‌بوجود آمد و به رشته‌های موجود ریاضی (حساب، هندسه مقدماتی، مقدمات جبرو مثلثات) روشهای عمومی مانند هندسه تحلیلی، حساب دیفرانسیل وانتگرال ونظریه ساده‌ترین معادلات دیفرانسیل اضافه شد وباین ترتیب حل مسائلی که قبلا حتی آرزوی حل آنها را هم نمیشدکرد، قابل حل ازآب درآمد.

اگر قانون منحنی خیلی پیچیده نباشد، همیشه میتوان برهرنقطه آن مماسی رسم کرد، برای این عمل‌کافی است که بکمك قواعد حساب دیفرانسیل از تابع این منحنی مشتق بگیریم، کاری که اغلب بیش ازچند دقیقه وقت لازم ندارد. قبلا تنها مماس بردایره ودوسه منحنی دیگر را میتوانستند رسم کنند و هرگزانتظار نداشتند که راه حل‌کلی برای این مسئله وجود داشته باشد.

اگر مسافتی که پس از مدت مفروضی طی میشود معلوم باشد، بوسیله همین حساب دیفرانسیل میتوان سرعت نقطه ویا شتاب آنرا درهرلحظه پیدا کرد. برعکس با در دست داشتن شتاب میتوان سرعت و مسافت را با استفاده از انتگرال (عکس دیفرانسیل) بدست‌آورد. از همین راه است که با اطلاع از خواص هندسی بیضی و با استفاده از قوانین نیوتونی حرکت و قانون جاذبه عمومی، بسادگی نتیجه میشود که سیارات بایستی روی مدار بیضی وطبق قوانین کپلر دورخورشید حرکت کنند.

مسائل مربوط بحداکثر و حد اقل و یا باصطلاح مسائل مربوط بماکزیمم و می‌نیمم Maximum et Minimum نیز اهمیت فوق‌العاده دارد، مثالی ذکر کنیم: میخواهیم ازتیر گردی‌بشعاع مفروض، تیری با مقطع مستطیل شکل بتراشیم بطوریکه حداکثر مقاومت خمشی راداشته باشد. اضلاع‌آنرا بچه نسبتی بایددرآورد؟ با بحث مختصری درباره مقاومت تیری که مقطع‌مستطیل دارد (بااستفاده از ملاحظات ساده حساب انتگرال) و سپس حل مسئله ماکزیمم (که برای آن از مشتق استفاده میشود)، این جواب بدست میآید که حداکثر مقاومت برای مقطعی خواهد بود که ارتفاع آن نسبت‌بقاعده‌اش مثل $\sqrt{2}$ به‌۱باشد. بدین ترتیب مسائل مربوط بماکزیمم و می‌نیمم هم بهمان سادگی مسائل مربوط برسم مماس حل میشود.

خمیدگی نقاط مختلف یك منحنی (اگر خط راست دایره نباشد) بطورکلی متفاوت است؛ شعاع دایره‌ای راکه خمیدگی آن همان خمیدگی منحنی درنزدیکی نقطه مفروض باشد و یا بعبارت دیگر شعاع‌انحنای منحنی را در نقطه مفروض چگونه

محاسبه میکنند ؟ حل این مسئله هم ساده است ، فقط باید عمل دیفرانسیل گیری را دو مرتبه انجام داد . شعاع انحنا نقش بزرگی در بسیاری از مسائل مکانیك بازی میکنند .

قبل از کشف محاسبات جدید فقط میتوانستند مساحت چند ضلعیها ، دایره ، قطاع و قطعه دایره و دو سه شکل دیگر را پیدا کنند. علاوه برآن ارشمیدس وسیلهٔ محاسبه سطح یك قطعه سهمی را بدست آورده بود . وسیله‌ای که ارشمیدس ضمن این محاسبه بکار میبرد برپایهٔ خواصی بود که مخصوص سهمی است وفوق‌العاده داهیانه وتیز هوشانه بود . موفقیت ارشمیدس این فکر را بوجود آورد که برای محاسبه سطح هر منحی جدید بایستی تحقیقات مشکل و داهیانه ای که مخصوص بهمان منحنی است انجام داد . چقدر باعث تحسین ریاضی دانان شد وقتیکه قضیه نیوتون ولایب نیز امکان محاسبه سطوحی راکه محدود به منحنیهای بکلی مختلف‌است‌بوجود آورد (این قضیه دربارهٔ مسئله تربیع ، یعنی عکس مماس است) . بنا براین روشن میشود که یك وسیلهٔ عمومی وجوددارد که برای حل تعداد بسیار زیادی ازمختلف ترین انواع مسائل‌مناسب است : محاسبه حجم، سطح، طول‌منحنی، جرم اجسام غیرمتجانس Non homogène وغیره هم بهمین مسئله مربوط است .

روش جدید در مکانیك موفقیت های باز هم بیشتری کسب کرده است : چنین بنظر میرسد که هیچ مسئله‌ای در مکانیك وجودندارد که بوسیله محاسبات جدیدروشن وحل نشود.

پاسکال Pascal روشن کرد که مقدار خلاء تریچلی Toricelli ضمن صعود از کوه زیادمیشود واین جریان باین‌علت است که ضمن صعود ، فشار جو کم میشود . اما این تنزل فشار طبق چه قانونی است ؟ این مسئله هم امروز از طریق مطالعه معادله دیفرانسیلی‌ساده حل‌میشود.

دریانوردان خوب میدانند که‌کافیست یکی دوبارطناب رادور تیراسکله به‌پیچانند تا یکنفر بتواند کشتی بزرگی‌را درلنگر گاه نگهدارد. چرا چنین‌است ؟ مسئله ازنظر ریاضی تقریباً همان مسئلهٔ قبلی است وبلافاصله حل میشود .

باین ترتیب پس ازبوجودآمدن آنالیز دوره‌ای قراردارد که درآن مواردداستعمال آنالیز در مختلف ترین رشته‌های صناعت وعلوم طبیعی پیشرفت عجیب وخارق‌العاده‌ای نموده است . آنالیز ریاضی که بطریق انتزاع از موارد مشخص ، بوجود آمده و با خصوصیاتیکه خاص مسائل معین و جداگانه است کاری ندارد ، خواص عمیق و کاملا واقعی جهان مادی را منعکس میکنند ومخصوصاً بهمین علت است که بعنوان وسیله‌ای

برای مطالعه مسائلی که تا این حد وسیع ومختلف است بکارمیرود ؛ حرکت مکانیکی اجسام جامد، حرکت مایعات وگازها ، حرکت اجزاء جداگانه آنها وقوانین جریان توده و مجموعه آنها ، پدیده های حرارتی و الکتریکی ، فعل و انفعالات شیمیائی و غیره ، همه در کادر علوم مربوط بخود و با استفاده وسیع از دستگاه آنالیز ریاضی مطالعه میشود .

در عین حال توسعه مورد مصرف آنالیز باعث شد که خود آنالیز ریاضی هم بی اندازه‌غنی شود و رشته هائی ازآن مانند نظریه سری ها ، بکاربردن آنالیز درهندسه ونظریه معادلات دیفرانسیل بوجودآمده وتکمیل شود .

بین ریاضی دانان اواسط سالهای ۱۷۰۰ این فکر شیوع کامل داشت که هر مسئلهٔ علوم طبیعی را ، بشرط اینکه بتوان بآن مفهوم ریاضی داد . یعنی بتوان بیان صحیح ریاضی آنرا پیدا کرد ، میتوان به‌کمك هندسه تحلیلی و حساب دیفرانسیل وانتگرال حل کرد.

بتدریج‌مسائل‌مربوط بعلوم طبیعی وصناعات بغرنج‌ترمیشد ولازم بود که روشهای یاد شده تکامل یابد . برای حل این مسائل جدید ، رشته های بعدی ریاضی یعنی : حساب واریانت ، نظریه توابع متغیرمختلط، نظریه میدان، معادلات انتگرال و آنالیز فونکسیونل متوالیاً بوجود آمد . ولی همه این محاسبات جدید در حقیقت ادامه و تعمیم مستقیم محاسباتی بود که درقرن هفدهم کشف شده بود. بزرگترین ریاضی‌دانان قرن ۱۸ برنولی D . Bernoulli (۱۷۰۰ ـ ۱۷۸۲) ، اولر Léonard. Euler (۱۷۰۷ ـ ۱۷۸۳) ، لاگرانژ joseph - Louis - Lagrange (۱۷۳۶ ـ ۱۸۱۳) در حالیکه راههای جدیدی در مقابل علم میگشودند ، دائماً از مسائل حیاتی علوم دقیقه الهام‌میگرفتند . تکامل‌پرجوش و خروش آنالیز درقرن‌نوزدهم نیزادامه داشت قرنی که درآن دانشمندان مشهوری مانندگوس (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵) ، کوشی (۱۷۸۹ـ ۱۸۵۷) ، استروگرادسکی M. V. Ostrogradski (۱۸۰۱ ـ ۱۸۶۱) ، چبیشف (۱۸۲۱ ـ۱۸۹۴) ، ریمان (۱۸۲۶ـ ۱۸۶۶)، آبل Henri Abel (۱۸۰۲ ـ ۱۸۲۹) و ایرشتراس (۱۸۱۵ ـ ۱۸۹۷) زندگی میکردند ودرتکامل آنالیزریاضی سهم بسزائی داشتند .

ریاضی‌دان‌نابغه روس لباچوسکی هم‌درتکامل‌بعضی ازمسائل مربوط بآنالیزریاضی تاثیر زیادی داشته است .

بزرگترین ریاضی دانان مربوط بقرون ۱۹و۲۰ را هم متذکر شویم: مارکوف A.A . Marcov (۱۸۵۶ ـ ۱۹۲۲) ، لیاپونوف (۱۸۵۷ ـ ۱۹۱۸) ، پوانکاره

Poincaré (۱۸۵٤ــ ۱۹۱۲)، کلین F.Klein (۱۸٤۹ ـ ۱۹۲۵) وهیلبرت D.Hilbert (۱۸٦۲ ـ ۱۹٤۳) .

در نیمه دوم قرن ۱۹ تجدید نظروتدقیق انتقادی عمیقی در اصول آنالیز بعمل آمد . روشهای نیرومند و مختلف آنالیز که تا آن زمان بوجود آمده بود ، شالوده واحد و منظمی بدست آورد که متناظربا میزان رشد «دقت ریاضی» بود ؛ اینها عبارت از روشهائی است که انسان میتواند بکمك آنها وروشهای قبلی مربوط به حساب وجبر و هندسه و مثلثات بدنیای اطراف خود مفهوم ریاضی بدهد ، پدیده های موجود را توصیف کند و توضیح بدهد و مسائل علمی مهم مربوط به این پدیده‌ها را حل کنند .

بخصوص پس از اکتبر ۱۹۱۷ ، آنالیز همراه باسایررشته های علوم ریاضی، در کشور شوروی تکامل همه جانبه پیدا کرد .

هندسه تحلیلی ، حساب دیفرانسیل و انتگرال و تئوری معادلات دیفرانسیل، ضمن برنامهٔ همه رشته های مختلف علمی جای گرفته است بطوریکه میلیونها مردم باین رشته های ریاضی آشنائی دارند ؛ اطلاعات مقدماتی مربوط باین علوم جزوبرنامه بسیاری از مدارس فنی‌است ودرزمان‌حاضراین مسئله مطرح است که این علوم را ضمن برنامه مدارس متوسطه قراردهند .

در دوران متاخرتر، بکاربردن ماشینهای‌بزرگ وسریع‌العمل‌حساب پیچ‌جدیدی در علوم ریاضی بوجود آورده است . این ماشینها ، باضافه همه رشته‌های ریاضی که‌در بالا ذکر شد ، امکانات خارق‌العاده و جدیدی به بشر میدهد .

امروز آنالیز با همه رشته هائی که از آن منشعب شده عبارت از شاخه های مختلف زیادی است که بین خود روابط نزدیك داشته و ضمناً بطور جداگانه هم ، هر یك از آنها تکمیل شده وبجلو میرود . این را هم باید دانست که قسمت اساسی این موفقیتها بدانشمندان شوروی تعلق دارد .

حالا بیش از هروقت دیگر نیروی هادی آنالیز ، احتیاجات زندگی ومسائلی است که بتوسعه بسیار عظیم صناعات‌ارتباط دارد. درمقابل ما مسائل ریاضی‌آئرودینامیك Aérodynamique سرعتهای ماوراءِ صوت قراردارد وبتدریج هم‌با موفقیت حل‌میشود مشکل‌ترین‌مسائل‌فیزیك ریاضی امروز، درچنان مرحله‌ای هستند که خواهند توانست نتایج عددی علمی بدست آورند .در فیزیك معاصر نه تنها برای حل مسائل تئوریهائی همچون مکانیك کوانتائی (ومسائل مربوط بدرك پدیده های میکرومیر Micromire که بآن مربوط‌اند) به‌عالی‌ترین قسمتهای‌آنالیزریاضی معاصراحتیاج‌است ، بلکه بدون این آنالیز اصلا نمیتوان مفاهیم اساسی این نظریات را فرموله کرد .

هدف فصل دوم اینست که خواننده را (خواننده‌ای که با ریاضیات مقدماتی آشناست) بشکل ساده وقابل فهم با بوجود آمدن وکاربردهای ساده مفاهیم مقدماتی و اساسی آنالیز مثل تابع ، حد ، مشتق و انتگرال آشنا کند ؛ رشته های خاص آنالیز در فصول دیگراین کتاب شرح داده شده است .

از آنجاکه این‌فصل خیلی‌مقدماتی است ، خواننده‌ای که با دوره معمولی‌آنالیز آشناست میتواند از آن صرفنظر کند ، بدون اینکه بفهم فصول بعدی لطمه‌ای وارد آید .

۲

تابع

مفهوم تابع ـ درطبیعت اشیاء وپدیده هائی وجود دارد که ازنظرساختمانی Organique بیکدیگر مربوطاند . ساده ترین و ثابت ترین این روابط ازقدیم‌الایام مورد مطالعه بشربوده واطلاعات مربوط بآنها بعنوان قوانین فیزیکی‌جمع‌آوری وتنظیم میشده است . در بسیاری موارد ، وجود این روابـط باین معنی است که چند کمیت مختلف که مربوط باندازهٔچند پدیدهٔ مختلف‌است، کاملا بهم مربوط‌است‌ومقدار هریك از آنها بمقدار دیگران مشروط است . مثلا اندازهٔ اضلاع مربع مستطیل سطح آنرا کاملا معین می کند . حجم گاز در حرارت معین ، مشروط به فشار آنست . انبساط طولی یك میله فلزی بوسیلهٔ حرارت‌آن معین‌میشود وغیره . قوانین مشابه دیگری هم وجوددارد که میتوان آنهارا منشاء مفهوم تابع شمرد .

در فرمولهای جبری هم که بازاء هرمقدار معین ازکمیت مفروض (که بصورت حرف درفرمول وجود دارد) میتوان کمیت دیگری را (که بوسیله فرمول بیان شده است) معین کرد ، مفهوم تابع وجود داشت .

چند مثال ازاین نمونه ذکرمیکنیم :

۱ـ فرض کنید که درمبداء زمان ، نقطه مادی بحال سکون باشد وسپس تحت تاثیر نیروی ثقل شروع بسقوط نماید. مسافت S که بوسیله نقطه در مدت زمان t طی شده‌است بوسیله فرمول زیربیان میشود .

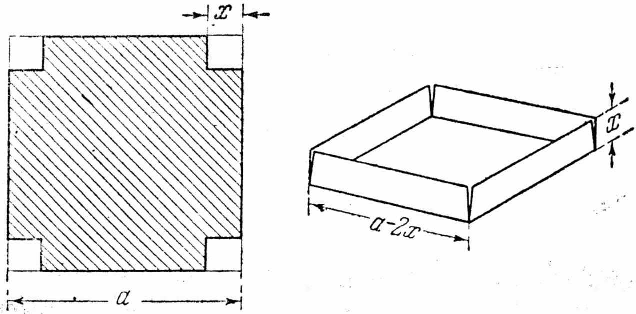
$$S = \frac{g.t^{۲}}{۲} \qquad (۱)$$

که درآن g شتاب نیروی ثقل است .

۲ ـ میخواهیم از مربع بضلع a قوطی مکعب مستطیل روبازی بسازیم که ارتفاع آن x باشد (شکل ۲) ، حجم V قوطی بوسیله فرمول زیرمحاسبه میشود :

$$V = x(a-2x)^2 \qquad (2)$$

رابطه (۲) اجازه میدهد که برای هر ارتفاع x (که باید درنامساوی $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$ صدق کند)، حجم قوطی را پیدا کنیم،

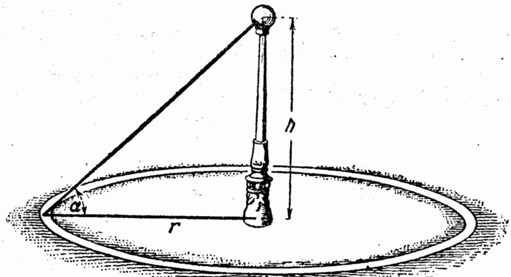


ش ۲

۳ـ فرض کنیم که درمرکز باند دایره‌ای شکل پاتیناژی، دیرکی فرو کرده و روی‌آن درارتفاع h فانوسی‌قرارداده باشیم (شکل۳). روشنائی T باند بوسیله فرمول زیربیان میشود:

$$T = \frac{A.\sin\alpha}{h^2+r^2} \qquad (3)$$

که درآن r شعاع باند و $tg\alpha = \frac{h}{r}$ و A ضریبی است که برحسب شدت نور فانوس معین میشود. با دانستن ارتفاع h میتوانیم طبق فرمول (۳)، T رامحاسبه کنیم.



ش ۳

۴ـ ریشه معادله درجه دوم :

$$x^۲+p.x-۱=۰ \qquad (۴)$$

بوسیله فرمول زیر بیان میشود :

$$x=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{۱+\frac{p^۲}{۴}} \qquad (۵)$$

بطورکلی در هرفرمول (ومنجمله در فرمولهای بالا) این خصیصه وجود دارد که میتوان بازاء هر مقدار مفروض از کمیتی که متغیر مستقل نامیده میشود (زمان t ارتفاع x ، ارتفاع h دیرك ، ضریب p معادله)، مقدار کمیت دیگررا که متغیروابسته یا تابع نامیده میشود (مسافت S ، حجم V ، روشنائی T ، ریشه x معادله) محاسبه نمود .

هریك از فرمولهائی که دربالا ذکر کردیم نمونه‌ای از تابع را بدست میدهد . مسافت S که نقطه طی کرده است تابعی است از زمان t ، حجم V قوطی تابعی است ازارتفاع x آن ، روشنائی T باند پاتیناژتابعی‌است ازارتفاع h دیرك وریشه‌های معادله درجه دوم (۴) تابعی‌است ازضریب p آن.

باید متذکر شد که در بعضی حالات ، متغیر مستقل میتواند هرمقدار عددی مفروض را قبول کند . مثلا مثال (۴) از این قبیل است : ضریب p معادله درجه دوم (۴) متغیر مستقلی است که میتواند هر عدد دلخواهی باشد . در حالات دیگر متغیر مستقل تنها میتواند مقدار دلخواهی ازیك مجموعه عدد (که ازقبل معین شده است) قبول نماید . مثلا درمثال (۲) ، حجم قوطی تابعی است از ارتفاع x آن واین ارتفاع میتواند هرعدد دلخواه ازمجموعه اعدادی که در نامساوی $۰\leqslant x\leqslant\frac{a}{۲}$ صدق میکند، قبول نماید . بهمین ترتیب درمثال (۳) روشنائی T باند تابعی است ازارتفاع h دیرك که بطور تئوریك میتواند هر مقدار دلخواهی که درنامساوی $h>۰$ صدق کند ، قبول نماید . ولی درعمل مقدار h بایستی درنامساوی $۰<h<H$ صدق کند که درآن H با امکانات فنی مقامات اداره کننده پاتیناژ معین میشود .

بازهم‌ازاینگونه مثالها ذکر کنیم . فرمول :

$$y=\sqrt{۱-x^۲}$$

یك فرمول واقعی است که ارتباط بین اعداد حقیقی x و y را معین می کند ، ولی‌نه بازاء همه مقادیر x، بلکه تنها بازاء مقادیری از x که درنامساوی $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ صدق کند. همچنین‌فرمول :

$$y=\log(1-x^2)$$

نیز بازاء مقادیری از x که در نا مساوی $-1<x<1$ صدق کنند ، مقداری برای y بدست میدهد .

بنابراین ناچاریم این وضع را بحساب آوریم که توابع مشخص بازاء هر مقدار عددی دلخواه، معین نیستند، بلکه تنها بازاء مقادیری از x معین میشوند که غالباً پاره خطی از محور x ها را پر میکنند (که ممکن است پایان داشته باشد و یا بی پایان باشد) .

حالا دیگرمیتوانیم تعریفی ازمفهوم تابع را که درزمان ما مورد قبول ریاضیات است بیان کنیم :

کمیت y تابعی است از کمیت (مستقل) x، بشرطی که قانونی وجودداشته باشد که بوسیله آن هرمقدار x (که متعلق بمجموعه‌ای از اعداداست) متناظر با مقدارمعینی از y باشد.

مجموعه مقادیر x (که دراین تعریف از آن نام بردیم)**میدان‌تعیین تابع** نامیده میشود .

هرمفهوم جدید غالباً به رمز وعلامت جدیدی احتیاج دارد . انتقال از حساب بجبر عبارتست از امکان ساختن فرمولهائی که برای مفروضات عددی دلخواه مناسب باشد (جستجوی راه حلهای عمومی بایجاد علامتهای حرفی منجرشد).

موضوع آنالیز عبارتست از مطالعه توابع (ارتباط کمیاتی با کمیات دیگر) ، همانطور که در جبر عدد مشخص را به عدد دلخواه تبدیل کردند ، در آنالیز هم از فرمولهای مشخص ، به توابع میرسیم . جمله«yتابعی است از x» راطبق قراردادچنین مینویسند :

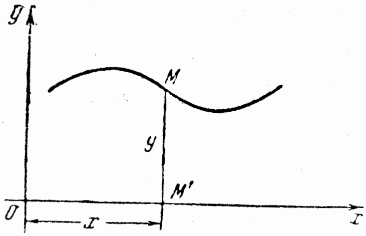
$$y=f(x)$$

همانطور که درجبر لازم است که برای اعداد مختلف ، حروف مختلفی انتخاب شود، درآنالیزهم برای‌علامتگذاری وابستگی‌های‌مختلف(توابع)بایستی علامات مختلفی درنظر گرفته شود :

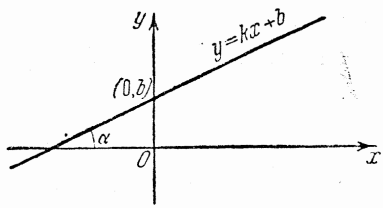
$$y=F(x)\ ،\ y=\varphi(x)\ ،\ \ldots\ldots\ldots$$

منحنی نمایش تغییرات توابع ـ یکی ازثمربخش‌ترین ودرخشان‌ترین افکار نیمه دوم قرن هفدهم فکرارتباط بین مفهوم تابع وشکل هندسی خط است .این

ارتباط بوسیلهٔ دستگاه مختصات قائم دکارتی تحقق پیدا کرد ، دستگاهی که خواننده‌از دوره مدرسه متوسطه با خطوط‌کلی آن آشنائی دارد .



ش ٤



ش ٥

دستگاه مختصات قائم دکارتی را روی صفحه نشان میدهیم . یعنی روی صفحه دوخط عمود برهم انتخاب میکنیم (محور طولها و محور عرضها) و روی هر یك از آنها جهت مثبت را معین می‌نمائیم . آنوقت بهرنقطه $\mathbf{M}$ میتوان دوعدد $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نسبت داد که مختصات $\mathbf{M}$ بوده و با یك‌مقیاس انتخابی معرف فواصل نقطه $\mathbf{M}$ ازمحورطولها و محور عرضها (باعلامات مربوطه) خواهد بود .[1]

بکمك دستگاه مختصات میتوان نمایش تغییرات تابع را بصورت یك خط نشان داد . فرض کنیم تابعی مثل :

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad (٦)$$

داده شده باشد . همانطور که میدانیم ، این بآن معنی است که برای هر مقدار $\mathbf{x}$ (که در داخل حوزه عمل تابع مفروض واقع باشد) میتوان مقدارمتناظر $\mathbf{y}$ را بنحوی معین کرد (و مثلا محاسبه نمود) . به $\mathbf{x}$ همه مقادیر عددی ممکن را میدهیم ، برای هرمقدار $\mathbf{x}$ طبق رابطه(٦) مقدار $\mathbf{y}$ را معین کرده و درصفحه ، نقطه‌ای بامختصات $(\mathbf{x}$و$\mathbf{y})$ مشخص میکنیم . بنابراین‌بازاءِ هرنقطه $\mathbf{M'}$ از محور $\mathbf{x}$ها (شکل ٤) نقطه‌ای‌مانند $\mathbf{M}$ بمختصات $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ وجود دارد ، مجموعه همه نقاط $\mathbf{M}$ خطی را مشخص میکنند که منحنی نمایش تغییرات تابع $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ نامیده میشود .

باین ترتیب **منحنی نمایش تغییرات تابع** $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ مکان هندسی نقاطی است که مختصات آنها در معادله (٦) صدق کند .

درمدرسه با منحنی نمایش‌تغییرات ساده‌ترین توابع‌آشنا شده‌ایم . مثلا باحتمال زیاد خواننده میداند که منحنی نمایش تغییرات تابع $\mathbf{y} = \mathbf{k}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$ که در آن $\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}$ اعداد ثابتی هستند بوسیلهٔ خط مستقیمی نشان داده میشود (شکل ٥) که با

---

۱ ـ عدد $\mathbf{x}$ را طول و عدد $\mathbf{y}$ را عرض نقطه $\mathbf{M}$ گویند .

جهت مثبت محور xها زاویه α را میسازد بطوریکه $tg\ \alpha = k$ باشد و محور yها را در نقطه (bو۰) قطع می کند . این تابع را تابع خطی نامند .

توابع خطی موارد استفاده‌فراوان‌دارد، بخاطربیاوریم که بسیاری‌ازقوانین‌فیزیکی بوسیلهٔ توابع خطی بیان میشود (که باندازه‌کافی دقیق است) . مثلا طول l جسم با تقریب کافی بعنوان یك تابع خطی نسبت بدرجه حرارت آن ، مطالعه میشود :

$$l = l_0 + \alpha l_0 t$$

که درآن α ضریب انبساط طولی و l_0 طول جسم بازاء $t = 0$ است.

اگر x معرف زمان و y طول راهی که نقطه‌ای در این مدت طی کرده است، باشد . تابع خطی $y = kx + b$ بیان میکند که در اینحالت حرکت نقطه‌یکنواخت و با سرعت k است ؛ عدد b معرف فاصله نقطه ازمبداء (یعنی نقطه‌ای که مسافت را ازآنجا حساب میکنیم) درلحظه $x_0 = 0$ می‌باشد .

اولا باین علت که اغلب میتوان تغییرات مورد بحث را (ولو در فاصلهٔ کوچکی هم باشد) بطور تقریب بصورت یکنواخت مطالعه کرد و ثانیاً باین علت که توابع خطی توابع ساده‌ای هستند،باعث شده که اینگونه توابع مورد مصرف فراوان پیدا کنند .

در موارد دیگرلازم است که روابط تابعی دیگری را بکاربریم. مثلا قانون‌بویل ماریوت[Robert Boyle انگلیسی وEdme Mariotte فرانسوی] را بخاطربیاوریم :

$$v = \frac{c}{p}$$

که در آن ارتباط بین v و p بصورت عکس نسبت مقادیر آنها داده شده . منحنی نمایش تغییرات چنین ارتباطی یك هذلولی HyPerbole است (شکل ٦)

از خود قانون فیزیکی بویل ـ ماریوت برمیآید که p و v مثبت‌اند ؛ بنابراین شاخه‌ای از منحنی که در ربع اول قرار دارد نماینده این قانون است .

پدیده های نوسانی که با حرکات دوره‌ای périodique همراه است ، معمولا با توابع مثلثاتی نمایش داده میشود ،زیرا همانطور که میدانیم تابع مثلثاتی‌بطوردوره‌ای تغییرمیکنند . مثلا اگر فنر معلقی را از حالت تعادل آن خارج کرده و تاحد ارتجاع آن بکشیم ، نقطه A آن نوساناتی در جهت قائم انجام خواهد داد که بوسیلهٔ قانون زیر که باندازه کافی (ونه مطلقاً) دقیق است ، بیان میشود :

$$x = a\cos(pt + \alpha)$$

که در آن x انحراف نقطه A از وضع تعادل ، t زمان و اعداد a و p و α مقادیر ثابتی هستند که به فلز فنرو اندازه آن و درجه کشش اولی آن مربوط است .

باید توجه‌داشت که ممکن است‌تابع‌درفواصل مختلف بوسیله فرمولهای مختلف

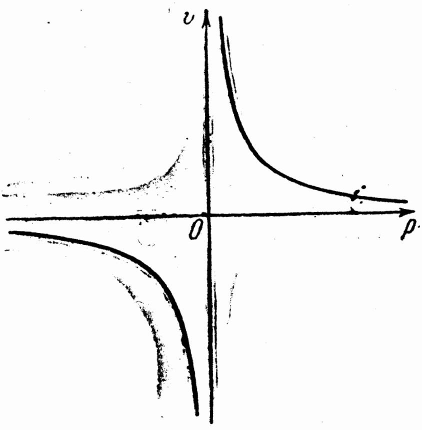
بیان‌شود واین فرمولها را حالات مختلف عمل،معین کند. مثلا رابطه $Q = f(t)$ یعنی رابطه‌بین‌درجه حرارت t یك گرم آب (یخ) ومقدار حرارت Q که در آنست، وقتی که t بین ۱۰ ـ درجه و ۱۰ + درجه تغییر کند ، تابع کاملا معینی است که با زحمت بوسیله یك فرمول بیان میشود .[1] ولی با دو فرمول میتوان بسادگی این تابع را معین کرد . از آنجا که ظرفیت حرارتی یخ مساوی ۰/۵ و ظرفیت حرارتی آب مساوی ۱ است ، این تابع بصورت زیربیان میشود ، (بشرطی که برای ۱۰ـ درجه مقدار ۰ = Q گرفته باشیم)

$$Q = 0.5\,t + 5$$

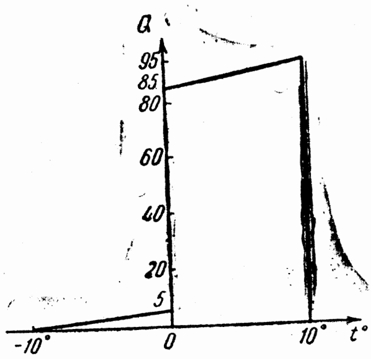
که در آن t در فاصله $-10^\circ \leqslant t < 0^\circ$ تغییر میکند و فرمول زیر :

$$Q = t + 85$$

که در آن t درفاصله $0^\circ < t \leqslant 10^\circ$ تغییرمیکند . برای $t = 0$ این تابع مبهم است و دارای بی‌نهایت جواب است : میتوان برای راحتی کار شرط کرد که برای $t = 0$ ،



ش ٦



ش ۷

تابع مقدار معینی را قبول کند و مثلا ۴۵ = $f(0)$ باشد

منحنی نمایش تغییرات تابع $Q = f(t)$ در شکل ۷ ،نشان داده شده است .

ما امثله زیادی از توابع ذکر کردیم که بوسیلهٔ فرمول داده شده‌است. طرح

[1] این بمعنای آن نیست که چنین تصوری غیرممکن است . در فصل دوازدهم نشان خواهیم داد که چگونه فرمول واحد را بدست میآورند .

توابع بکمك فرمول از نقطه نظر ریاضی اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد ، زیرا باین وسیله شرایط کاملا مساعدی برای بررسی خواص تابع باروش ریاضی فراهم میشود .

ولی نباید گمان کرد که فرمول‌تنها وسیله‌طرح تابع است . وسائل زیاددیگری وجود دارد که در بین آنها نمایش تغییرات تابع اهمیت خاصی دارد ، زیرا تصور هندسی‌تابع را جلوچشم ما قرارمی‌دهد . مثال زیر میتواند این مطلب را بخوبی روشن کند .

برای‌اینکه‌تغییردرجه حرارت هوارادرجریان شبانه روزبدانیم ، درایستگاههای هواشناسی ازوسیله‌ای بنام‌ترموگراف Thérmographe استفاده می کنند. ترموگراف تشکیل شده است از استوانه‌ای که باکمك یك دستگاه ساعتی دور محورش میچرخد و یك قوطی برنجی خم شده‌ای که نسبت به تغییرات درجه حرارت حساسیت دارد . در اثربالا رفتن درجهٔ حرارت‌این قوطی باز میشود و در نتیجهٔ این‌انبساط، قلمی که‌بوسیله یك اهرم کوچك بآن بسته است بالامیرود . برعکس در اثرپائین آمدن درجه حرارت قلم هم پائین میآید ؛ روی استوانه یك باند کاغذی شطرنجی بطور مناسب چسبانده شده که روی‌آن بوسیلهٔ قلم، خطی‌رسم میشود که همان نمایش تغییرات‌تابع $T=f(t)$ میباشد و ارتباط بین زمان و درجهٔ حرارت هوا را بیان می کند . باکمك‌منحنی‌بدست آمده میتوان بدون هیچ‌محاسبه‌ای ، مقداردرجه حرارت T رادرهرلحظه‌زمانی t معین کرد .

نمونه‌ای که ذکر کردیم روشن می کند که منحنی نمایش تغییرات بخودی خود تابع را معین می کند و این‌تعیین، مستقل از آنست که فرمول تابع داده شده باشد یا نه .

ما بعداً باین سؤال برخواهیم گشت (فصل دوازدهم) و صحت حکم بسیار مهم زیر را نشان خواهیم داد : هرمنحنی نمایش تغییراتی را که اتصالی باشد میتوان‌بوسیله یك فرمول ویا باصطلاح دیگر بوسیله بیان تحلیلی Analytique نشان‌داد . همین مطلب در مورد بسیاری از منحنی نمایش تغییرات انفصالی هم صحیح است [۱].

متذکر میشویم که تنها در اواسط قرن گذشته بود که این حکم (که اهمیت خیلی اساسی دارد) ، بطور کامل درریاضیات مفهوم شد . تاآنوقت تحت عنوان‌اصطلاح «تابع»، فقط‌یك بیان تحلیلی (فرمول)رامی‌فهمیدند . ولی درضمن بغلط تصورمیکردند که هرمنحنی نمایش تغییرات متصل متناظربایك بیان تحلیلی‌نیست وگمان میکردند که منحنی نمایش تغییرات توابعی که فرمول تحلیلی‌آنها داده شده باشد بایستی نسبت

---

۱ ـ البته این حکم برای خواننده وقتی‌کاملا روشن خواهد شد که اصطلاح «فرمول» و «بیان تحلیلی» در ریاضیات ، برای او بطور دقیق تعریف و روشن‌شود .

بسایر منحنی‌ها دارای خواص ممتازتری باشد .

باری درقرن‌نوزدهم کشف‌شد که همه منحنی‌نمایشهای متصل را میتوان بوسیله فرمولی(که‌یکی نسبت بدیگری کمتر یا بیش‌تر بغرنج است) بیان نمود . باین‌ترتیب نقش استثنائی وفوق‌العاده «بیان تحلیلی» که‌تنها وسیله تعیین وتوضیح تابع‌بشمارمیرفت متزلزل شد و درنتیجه تعریف جدید وقابل انعطاف‌تری برای مفهوم تابع تنظیم شد که ما در بالا ازآن یادکردیم .بموجب این تعریف : متغیر yرا تابعی ازمتغیر x گویند، بشرطی که قانونی‌وجود داشته باشد که طبق آن هرمقدار x (که مربوط بحوزه‌قلمرو این تابع است)با مقدار کاملا معینی ازy متناظرباشد . دراینجا این مطلب مهم نیست که قانون مزبوربچه وسیله داده شده است : فرمول ، منحنی ، جدول و یا هر وسیله دیگری از این قبیل میتواند وسیله‌ای برای بیان این قانون باشد .

در تاریخ ریاضی ، تعریف مذکور را غالباً به دیریکله Dirichlet ریاضی دان نسبت‌می‌دهند ،ولی‌باید خاطرنشان کرد که این‌تعریف را لباچوسکی Lobatchevsky هم همزمان با دیریکله ومستقل از او پیشنهاد کرد .

درخاتمه پیشنهاد می کنیم که توابع زیر را بعنوان تمرین رسم کنید :

$$x^{3} \quad \text{و} \quad \sqrt{x} \quad \text{و} \quad \sin x \quad \text{و} \quad \sin 2x \quad \text{و} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$l_n x \quad \text{و} \quad l_n(1+x) \quad \text{و} \quad |x-3| \quad \text{و} \quad \frac{x+|x|}{2}$$

بایستی باین مسئله هم توجه کرد که منحنی تابعی که برای تمام مقادیرx در رابطه :

$$f(-x) = f(x)$$

صدق می کند ، نسبت به محور y ها متقارن است و در حالتی که در رابطه :

$$f(-x) = -f(x)$$

صدق کند نسبت به مبداء مختصات متقارن است .

فکر کنید که منحنی تابع$f(a+x)$ ، وقتی که a مقدارثابتی است ، ازروی تابع $f(x)$ چگونه بدست میآید . بالاخره ، این مسئله را حل کنید که چگونه با استفاده ازمنحنی نمایش تغییرات‌توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ میتوان مقدار تابع مرکب :

$$y = f[\varphi(x)]$$

را بدست آورد .

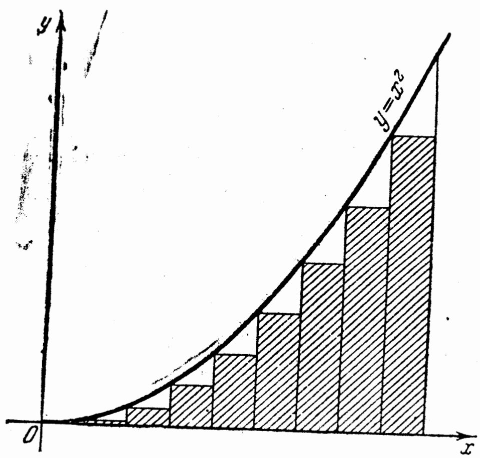
۳

حد

درقسمت اول این فصل گفتیم که آنالیز ریاضی معاصر با اسلوب و روش خاصی کار می کند که محصول قرنهای متمادی بوده و بعنوان وسیله اساسی قضاوت، درخدمت آنالیزقرار گرفته‌است . منظور ما روش بی‌نهایت کوچك‌ها ویا بزبان دیگرروش حدود است . کوشش میکنیم که تصوری دربارهٔ این‌مفاهیم بدست دهیم .

بمثال زیرتوجه کنیم :

میخواهیم سطح محدود بین سهمی بمعادله $y=x^2$ و محور x ها وخط $x=1$ را محاسبه کنیم (شکل۸) ریاضیات مقدماتی وسیله‌ای برای حل این‌مسئله بما نمیدهد



ش ۸

ولی میتوان بطریق زیرعمل نمود :

پاره خط [۰ و ۱] محور x ها را بوسیله نقاط:

$$0 \text{ و } \frac{1}{n} \text{ و } \frac{2}{n} \text{ و } \ldots\ldots \text{ و } \frac{n-1}{n} \text{ و } 1$$

به n قسمت مساوی تقسیم میکنیم و روی هریك ار این قسمتها، مستطیلی میسازیم که رأس زاویه بالا و سمت چپ‌آن روی سهمی باشد. درنتیجه مستطیلهای سایه‌خورده شکل ۸ را بدست میآوریم که S یعنی مجموع مساحت های آنها برابراست با :

$$S_n = 0\times\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\times\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1^2+2^2+\ldots\ldots+(n-1)^2}{n^3}=^{1}$$

$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

مقدار S_n را بصورت زیرنشان میدهیم:

$$S_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}+\alpha_n \qquad (7)$$

مقدار α_n به n مربوط است و اگرچه درظاهر مفصل است ولی خاصیت جالبی دارد . اگر n بطور نا محدود بزرگ شود α_n بسمت صفر میل میکند. این‌خاصیت را میتوان باین طریق هم بیان کرد : اگر عدد ثابت دلخواهی مانند ε داده شده باشد ، میتوان عدد مناسبی‌مانند N بدست‌آورد بطوریکه برای هرعدد n که بزرگتر

---

۱ ـ اگر درتساوی واضح $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ بازاء مقادیر $k=1$ و ۲ و ...... و $n-1$ قسمتهای سمت راست و چپ را بطور جداگانه با هم جمع کنیم ، معادله $n^3-1=3\sigma_n+\frac{3(n-1)n}{2}+n-1$ که‌درآن : $\sigma_n=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2$ میباشد بدست‌میآید و با حل این‌معادله رابطه زیربدست میآید :

$$\sigma_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

از N باشد ، عدد α_n ازنظر قدر مطلق از ε کوچکتر باشد .[1]

مقدار α_n نمونه ای از مقادیر بی نهایت کوچك بهمان مفهومی است که در ریاضیات معاصر از آن فهمیده میشود .

در شکل ۸ دیده میشود که اگر عدد n رابطورنامحدود بزرگ کنیم، مجموع S_n (مساحتهای‌مستطیلهای سایه‌خورده) بسمت مساحت شکل‌منحنی‌الخطی که‌جستجو می کردیم میل می کند ، از طرف دیگر ، از آنجا که در تساوی (۷) بامیل n بسمت بی‌نهایت α_n بسمت صفرمیل می کند ، ثابت میشود که مجموع S_n بسمت $\frac{۱}{۳}$ میـل مینماید . از آنجا نتیجه میشود که سطح مورد جستجو یعنی S مساوی $\frac{۱}{۳}$ است و باین ترتیب ما مسئله را حل کردیم .

بنابراین ، روش مذکوربااینجا منجر میشود که برای پیدا کردن مقداری مانند S ، مقدار دیگری مانند S_n که متغیربوده وبسمت S میل میکند درنظرمیگیریم S_n میتواند مقادیری مانند $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ و . . . . که برطبق قانون معینی با اعداد طبیعی . . . . . و۳ و۲ و $n=۱$ مربوط است بخود بگیرد . سپس ، همانطور که متوجه شدیم مقدار متغیر S_n میتواند بصورت مجموع عدد ثابت $\frac{۱}{۳}$ ومقداربی نهایت کوچك α_n درآید وما ثابت کردیم که S_n بسمت $\frac{۱}{۳}$ میل میکند و بنا بر این $S=\frac{۱}{۳}$ میشود . با زبان نظریهٔ « حدود » در اینحالت‌میتوان گفت که مقدار متغیر

---

[1] ــ مثلا اگر $\varepsilon=۰٫۰۰۱$ باشد میتوان N را مساوی ۵۰۰ گرفت . در حقیقت ازآنجا که :

$$\frac{۱}{۶n^۲}<\frac{۱}{۲n}$$

است ، اگر n عددی صحیح ومثبت باشد داریم :

$$\left|\alpha_n\right|=\left|\frac{۱}{۶n^۲}-\frac{۱}{۲n}\right|=\frac{۱}{۲n}-\frac{۱}{۶n^۲}<\frac{۱}{۲n}$$

و برای $n>۵۰۰$ خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{۲n}<۰٫۰۰۱$$

بهمین ترتیب میتوان هر مقدارکوچکی برای ε انتخاب کرد، مثلا :

$\varepsilon_۱=۰/۰۰۰۱$ و $\varepsilon_۲=۰٫۰۰۰۰۱$ و . . . . .

و متناظر با آنها اعداد کاملا بزرك . . . . . و $N_۲$ و $N=N_۱$ را بدست‌آورد

S_n وقتی که n بسمت بینهایت میل میکند مساوی است با $\frac{۱}{۲}$.

حالا به تعریف دقیق مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم :

اگر مقدار متغیر α_n ($n=۱$ و ۲ و . . . .) دارای چنان خاصیتی باشد که برای هر عدد مثبت ε که باندازهٔ دلخواه کوچك است ، بتوان عدد N را بقدر کافی بزرگ انتخاب کرد بطوریکه اگر $n>N$ باشد نامساوی $|\alpha_n|<\varepsilon$ هم برقرار باشد.

در اینصورت میگویند که α_n **مقدار بی نهایت کوچکی** است ومینویسند :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = ۰ \quad \text{یا} \quad \alpha_n \longrightarrow ۰$$

ازطرف دیگر ، اگر متغیری مانند x_n را بتوان بصورت مجموع زیر نوشت:

$$x_n = a + \alpha_n$$

که درآن a عدد ثابت و α_n مقدار بینهایت کوچکی باشد . دراینصورت میگویند که متغیر x_n ، وقتی که n بسمت بینهایت میل کند، بسمت عدد a میل میکند ومینویسند :

$$\lim x_n = a \quad \text{یا} \quad x_n \to a$$

عدد a را **حد** x_n گویند. بخصوص واضح است که حد مقادیر بینهایت کوچك مساوی صفر است .

نمونه هائی ازمقادیر متغیر را مطالعه کنیم :

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{۱}{n} \\ y_n &= -\frac{۱}{n^۲} \\ z_n &= \frac{(-۱)^n}{n} \\ u_n &= \frac{n-۱}{n} = ۱ - \frac{۱}{n} \\ v_n &= (-۱)^n \end{aligned}\right\} \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots\ldots)$$

واضح است که مقادیر x_n و y_n و z_n مقادیر بینهایت کوچك‌اند : x_n بطـور نزولـی بسمت صفر میل میکند ، y_n بطور صعـودی بسمت صفر میل میکند (در حالیکه همیشه مقادیر منفی را اختیار میکنند) و z_n درحالی‌بسمت صفرمیل میکند که حول صفر نوسان مینماید . همچنین $u_n \to ۱$ ولی v_n دارای حد کلی نیست زیرا با نمو n بهیچ عدد ثابتی نزدیك نمیشـود و همیشه یکی از دو مقدار ۱ و ۱— را اختیار مینماید .

در آنالیز مفهوم **بی نهایت بزرگ** هم اهمیت خاصی دارد . اگـر x_n ($n=$ ۱و ۲و . . . . .) مقدار بینهایت‌بزرگ باشد بایستی برای هر عدد مثبت M که باندازهٔ دلخواه بزرگ است ، عددی مانند N وجود داشته باشد که اگر $n>N$ باشد داشته باشیم :

$$|x_n|>M$$

این‌حقیقت که درمقدار x_n بی‌نهایت بزرگ است چنین نوشته میشود :

$$\text{حد}\ x_n=\infty \qquad \text{یا} \qquad x_n\to\infty$$

در اینگونه موارد میگویند که x_n بسمت بینهایت میل میکند . اگر مقدار x_n ، ضمن این میل مثبت یا منفی باشد آنرا چنین مینویسند :

$$x_n\to+\infty \quad (\text{ویا} \quad x_n\to-\infty) \quad \text{مثلا :}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد}\ n^{۲}=+\infty \\ \text{حد}\ (-n^{۳})=-\infty \\ \text{حد}\ \log\frac{۱}{n}=-\infty \\ \text{حد}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{n}\right)=-\infty \end{array}\right\} \quad \text{برای}\ n=\text{۱و ۲و . . . .}$$

بسادگی دیده میشود که اگر α_n بینهایت بزرگ باشد $\beta_n=\frac{۱}{\alpha_n}$ بینهایت کوچك خواهدبودوبرعکس.

دومقدار متغیر x_n و y_n را میتوان جمع ، تفریق ، ضرب یا تقسیم کـرد و بطـور کلی مقادیر متغیر جدیـدی بدست آورد : مقادیر خاص مجمـوع $x_n + y_n$ تفاضل $x_n - y_n$، حاصل‌ضرب $x_n \cdot y_n$ و خارج قسمت $\frac{x_n}{y_n}$ متناظر با مقادیرزیر خواهدبود .

$$x_۱ \pm y_۱ \text{ و } x_۲ \pm y_۲ \text{ و } x_۳ \pm y_۳ \text{ و } \dots\dots\dots$$

$$x_۱ \cdot y_۱ \text{ و } x_۲ \cdot y_۲ \text{ و } x_۳ \cdot y_۳ \text{ و } \dots\dots\dots$$

$$\frac{x_۱}{y_۱} \text{ و } \frac{x_۲}{y_۲} \text{ و } \frac{x_۳}{y_۳} \text{ و } \dots\dots\dots$$

ازاینجا این حقیقت که‌بخودی‌خود هم‌روشن‌است ثابت میشود که اگرمتغیرهای x_n و y_n بسمت حد معینی میل کند ؛ مجموع ، تفاضل ، حاصل ضرب و خارج قسمت آنها هم بسمت حدی که‌مساوی بامجموع، تفاضل ، حاصل ضرب وخارج قسمت حدود آنهاست میل خواهدکرد ، این مطلب را میتوان چنین نوشت :

$$\text{حد}\left(x_n \pm y_n\right) = \text{حد}\ x_n \pm \text{حد}\ y_n \text{ و}$$

$$\text{حد}\left(x_n \cdot y_n\right) = \text{حد}\ x_n \cdot \text{حد}\ y_n \text{ و}$$

$$\text{حد}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\text{حد}\ x_n}{\text{حد}\ y_n}$$

فقط در حالت خارج قسمت باید فرض کرد که حد مخرج $\left(\text{حد}\ y_n\right)$ مساوی صفرنباشد . اگر $\text{حد}\ y_n = ۰$ ، و $\text{حد}\ x_n \neq ۰$، باشد درآنصورت نسبت x_n به y_n بسمت حد معینی میل نمی کند ، بلکه بسمت بی‌نهایت میل‌می کند . حالتی هم که صورت ومخرج با هم‌بسمت صفرمیل کنند حالت جالب ومهمی است؛ در

این حالت از قبل نمیتوان گفت که آیا نسبت $\frac{x_n}{y_n}$ بسمت حدی میل می کند یا نه واگر چنین حدی وجود دارد این‌حد کدام است ؟ زیرا جواب باین مسئله کاملا مربوط بنوع‌میل x_n و y_n بسمت صفراست ، مثلا اگر داشته باشیم .

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ و } y_n = \frac{1}{n^2} \text{ و } z_n = \frac{(-1)^n}{n}$$
$$(n = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots\ldots)$$

در آنصورت :

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \to 0 \text{ و } \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$$

و از طرف دیگر واضح است که مقدار :

$$\frac{x_n}{z_n} = (-1)^n$$

بسمت هیچ حدی میل نمی کند .

بنابراین وقتی که صورت و مخرج کسری هردو بسمت صفر میل می کند ، از قبل نمیتوان آنرا مثل یك قضیهٔ کلی مطالعه کرد، دراینحالت برای‌هر کسرجداگانه‌بایستی بررسی جداگانه‌ای طرح کرد .

بعداً خواهیم دید که مسئله اساسی حساب دیفرانسیل که میتوان آنرا بعنوان مسئله پیدا کردن سرعت حرکت غیریکنواخت در لحظهٔ مفروض مطالعه کرد ، منجر به تعیین حد نسبت دومقداربی‌نهایت کوچك یعنی نسبت نمومسافت به نموزمان میشود.

ما متغیر x_n را مطالعه کردیم . این‌متغیر مقادیرعددی . . . . و x_2 و x_1 را متوالیاً قبول‌میکرد . دراینجا n از سلسلهٔ اعدادطبیعی........ و ۳ و ۲ و ۱ $= n$ عبور میکرد ، ولی میتوان فرض کرد که n بطوراتصالی تغییر کند ، مثل زمان ، و با

توجه بآن از راهی شبیه آنچه که قبلا گفتیم حد متغیر x_n را معین کرد. خاصیت اینگونه حدودهم کاملا شبیه‌خاصیت متغیرهای انفصالی(یعنی غیراتصالی) است. متذکر میشویم که دراینجا (یعنی در حالیکه n بطور اتصالی تغییرمی کند) الزامی ندارد که n بسمت بی‌نهایت میل کند ، بلکه میتواند بمقدار مفروض‌مانند n_0 نزدیك شود .

بعنوان مثال تغییر $\frac{\sin x}{x}$ را وقتی که x بصفر نزدیك میشود تعقیب می کنیم .

اندازه آن بازاء بعضی از مقادیر x بدینقرار است :

x	$\frac{\sin x}{x}$
۰/۵۰	۰/۹۵۸۹۰۰
۰/۱۰	۰/۹۹۸۳۰۰
۰/۰۵	۰/۹۹۹۶۰۰
...	....

(مقدار x برحسب رادیان بیان شده است) .

همانطورکه دیده میشود با نزدیك شدن x به صفر ، مقدار $\frac{\sin x}{x}$ بـه ۱ نزدیك میشود. ولی البته لازم است که این مطلب را با دقت اثبات کنیم . اثبات را میتوان مثلا از نامساوی زیربدست آورد ، این‌نامساوی برای همه زوایای‌مخالف‌صفری که در ربع اول باشد صادق است :

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

اگر تمام اجزاء نامساوی را به $\sin x$ تقسیم کنیم چنین خواهیم داشت :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

و از آنجا نتیجه میشود :

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

اما از آنجا که با میل x بسمت صفر ، $\cos x$ بسمت ۱ میل میکند مقـدار $\frac{\sin x}{x}$ هم که بین مقادیر $\cos x$ و ۱ قرار دارد بسمت ۱ میل میکند یعنی :

$$\text{حد}_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مورد استفاده این حالت را بعداً خواهیم دید .

این تساوی را ما برای حالتی ثابت کردیم که x در عین حال که همیشه مثبت است ، بسمت صفرمیل می کند . با تغییرظاهری استدلال میتوان همین تساوی را برای حالتی هم که x باقبول مقادیر منفی ، بسمت صفر میل میکند ، بکاربرد .

اکنون سئوال دیگری‌را مطرح کنیم . یك کمیت متغیر، میتواند دارای‌حدی باشد و یا نباشد ، این سئوال پیش میآید که آیا نمیتوان راهی پیدا کرد که بکمك آن بتوان وجود حد را برای متغیراثبات کرد ، حالت مهم وکاملا عمومی‌را درنظرمیگیریم واین حالتی است که میتوانیم چنین راهی را برای آن پیدا کنیم .

فرض کنید که کمیت متغیر x_n صعودی و یا لا اقل غیر نزولی باشد . یعنی نامساوی زیررا داشته‌باشیم:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots \text{ و}$$

و فرض کنید که ضمناً کشف کرده باشیم که تمام مقادیر x_n از عددی مانند M تجاوز نکنند یعنی $x_n < M$ $(n = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و} \ldots\ldots)$ اگر مقدار x_n و عدد M را روی محور x ها نشان دهیم ، نقطهٔ متغیر x_n روی محور بطرف راست جلومیرود ، درحالیکه همیشه سمت چپ نقطهٔ M قراردارد . باندازهٔکافی روشن‌است که نقطهٔ متغیر x_n بایستی‌الزاماً بطرف نقطه حدی‌مانند a میل کند که یا درسمت چپ M واقع است ویا حداکثر برM منطبق است .

بنابراین درحالت مورد مطالعه ، متغیر ما دارای حدی خواهد بود :

$$\text{حد } x_n = a$$

در استدلال بالا ازروشنی و وضوح مطلب استفاده کردیم ، ولی نمیتوان آنرا به عنوان اثبات تلقی کرد . در دورهٔ جدید آنالیز ریاضی بر اساس نظریه اعداد حقیقی ، استدلال واقعی‌آن داده میشود .

بعنوان نمونه متغیرزیررا مطالعه میکنیم :

$$u_n=(۱+\frac{۱}{n})^n \quad (n=۱ \text{ و } ۲ \text{ و} ۳ \ldots\ldots)$$

اولین مقادیر u_n چنین‌است :

$u_۱=۲$ و $u_۲=۲/۲۵$ و $u_۳=۲/۳۷$ و $u_٤=۲/٤٤$و .....

وهمانطور که دیده میشود این متغیر صعودی‌است ، بطورکلی با بسط u_n طبق بینم نیوتون Binome de Newton میتوان ثابت کرد که این متغیر برای همه مقادیر n صعودی است . علاوه بر آن بسادگی ثابت میشود که برای هر مقدار n نامساوی $u_n<۳$ صادق است . دراینحالت متغیر ما دارای حدی است که از عدد ۳ تجاوز نمی کند . بطوریکه بعداً خواهیم دید این عدد نقش فوق‌العاده زیادی درآنالیز ریاضی بازی می کند و از بعضی لحاظ طبیعی ترین پایه برای لگاریتمهای اعداداست .

حد این متغیر را باحرف e نشان میدهند ومساوی است با :

$$e=\text{حد}_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=۲/۷۱۸،۲۸۱،۸۲۸،٤۵۹،۰٤۵\ldots\ldots$$

با مطالعات مفصل‌تری ثابت می کنند که عدد e عددی منطق (گویا) نیست .[۱]
همچنین میتوان ثابت کرد که نه تنها وقتی که $n\to+\infty$ بلکه موقعی هم که $n\to-\infty$ حد مزبورمساوی e خواهدبود .

ضمناً درهر دوحالت n را میتوان شامل اعداد غیرصحیح هم دانست .

ماروی یك نقش مهم مفهوم حد درعلوم طبیعی مکث میکنیم ، این‌نقش دراین واقعیت جالب توجه وجود دارد که تنها بکمك مفهوم حد (عبور یا انتقال حدی) است که میتوانیم کمیات مشخصی را که درعلوم طبیعی بآنها بر خورد میکنیم بطور دقیق و کامل تعریف نمائیم .

حالت زیررا که یك مثال هندسی‌است بررسی کنیم . دردورهٔ هندسهٔ دبیرستانی

۱ـ در ارتباط با این مطلب باید متذکر شد که جمع ، تفریق ، ضرب وتقسیم (اگر تقسیم برصفر را استثنا کنیم) اعداد گویا ، یعنی اعدادی که بصورت $\frac{p}{q}$ باشند ، (p و q اعداد صحیح‌اند) دوباره منجربعددی گویا می‌شود . ولی درمورد اعمال‌مربوط بحدود اینطور نیست . حد توالی اعداد گویا ممکن است عددی گنگ باشد .

ابتدا اشکالی مطالعه میشود که به پاره خطهای مستقیمی محدود باشند و سپس بمسئلهٔ پیچیده تر مربوط به پیدا کردن طول محیط دایره با شعاع مفروض میرسیم .

اگر مشکلاتی را که بحل این مسئله مربوط اند تحلیل کنیم میتوانیم آنها را بصورت زیرجمع بندی کنیم :

بایستی باین مطلب توجه کنیم که طول محیط دایره چیست ، یعنی تعریف دقیق آنرا پیدا کنیم ، اصل مسئله اینست که هم تعریف را منجر به پاره خطهای مستقیم کنیم وهم با این تعریف راهی برای محاسبهٔ محیط دایره جستجو نمائیم .

بدیهی است که نتیجهٔ عددی بایستی با عمل تطبیق کند . مثلا اگر دایره ای انتخاب کنیم که از نخ واقعی درست شده باشد ، با قطع نخ و کشیدن آن بایستی پاره خطی بدست آوریم که در حدود دقت اندازه گیری ، طول آن با محاسبه تطبیق کند .

بطوریکه از دورهٔ دبیرستانی میدانیم ، حل این مسئله منجر بتعریف زیر میشود: محیط دایره عبارتست از حدی که محیط یك چند ضلعی منظم[1] محاط در این دایره وقتی که تعداد آن بی‌نهایت زیاد میشود ، بسمت آن میل می کند . باین ترتیب حل این مسئله اساساً برپایه مفهوم حد قرارمی گیرد بطریق‌مشابهی طول‌منحنی‌مسطح دلخواه را معین میکنند .

ما قبلا و در همین قسمت اخیر ، یك رشته امثله مربوط بکمیات فیزیکی و ریاضی دیدیم که تعریف دقیق آنها را تنها با کمك بکار بردن مفهوم حد میتوان پیدا کرد .

تنها در ابتدای قرن گذشته بود که مفاهیم حد و بی نهایت کوچك بطور قطع تنظیم شد . تعریفی از این مفاهیم که قبلا آوردیم با نام کوشی Augustin _Louis Cauchy همراه است . قبل از کوشی با مفاهیمی که کمتر دقیق بودند سر و کار داشتند.

تعریف امروز حد و بی نهایت کوچك ، بعنوان کمیت متغیر وهمچنین تعریف اعداد حقیقی نتیجهٔ تکامل آنالیز ریاضی وبوسیلهٔ تنظیم وتثبیت موفقیتهای آنست .

۱ ــ منظم بودن چند ضلعی مهم نیست . آنچه که دراینجا مهم است ، اینست که بزرگترین ضلع چند ضلعی محاط در دایره بسمت صفرمیل کند .

٤

توابع متصل

توابع متصل قسمت اساسی توابعی را تشکیل میدهند که سر و کارآنالیز ریاضی با آنهاست. تصور درباره توابع متصل‌را میتوان باین ترتیب‌بدست‌آورد که‌بگوئیم‌منحنی نمایش تغییرات آنها اتصالی‌است ، یعنی میتوان‌منحنی‌آنها را رسم کرد ، بدون اینکه مداد را از کاغذ جدا نمود .

از نظر ریاضی توابع متصل خاصیتی را بیان میکنند که ما درعمل غالباً باآنها سر و کار داریم ؛ این خاصیت از این قرار است : هر نمو کوچك در متغیر مستقل متناظر است با نمو کوچکی از متغیری که بآن وابسته است (تابع) . بهترین نمونه توابع متصل قوانین مختلف حرکت جسم است : $S=f(t)$ که ارتباط بین مسافت S که بوسیلهٔ جسم پیموده شده وزمان t را بیان می کند .

زمان وفضا متصل‌اند و بنا بر این قانون حرکت جسم یعنی $S = f(t)$ که رابطه‌معینی را بین زمان وفضا معین می کنددارای این خصیصه است که هرنمو کوچك زمان متناظر با نمو کوچکی از مسافت است .

بشراز راه مشاهده و بررسی باصطلاح ملاءهای متصل (جامد ، مایع و یا گازی شکل) که او را احاطه کرده است . همچون فلزات ، آب وهوا بمفهوم انتزاعی اتصال رسید. درحقیقت آنطور که حالا دیگر کاملا روشن شده‌است ، هرملاء فیزیکی‌عبارتست از تراکم تعداد زیادی ذرات جداگانه ومتحرك . ولی این ذرات وفواصل بین آنها در

مقایسه با حجمی از ملاء که در پدیده های فیزیکی میکروسکوپی سر و کار داریم ، آنقدر کوچك است که اگر ملاء مورد مطالعه را بدون خلل و فرج در نظر گرفته و چنان فرض کنیم که درفضای اشغالیش بطوراتصالی مستقرشده است، در بسیاری موارد، ببررسی ما لطمه‌ای نخواهد زد .

بسیاری از قواعد فیزیکی مانند هیدرو دینامیك Hydrodynamique آئرودینامیك Aérodynamique و نظریه جهمندی élasticité بر پایه همین فرض بنا شده است . مفهوم ریاضی اتصال درمورد این قواعد هم ،مثل بسیاری موارد دیگر ، نقش عمده‌ای بعهده دارد .

تابع $y=f(x)$ و مقدارکاملامعینی برای‌متغیر مستقل ، مثل $x_\circ$ درنظرمیگیریم اگر تابع ما انعکاسی از یك جریان اتصالی باشد، بایستی بمقداری از x که تفاوت کمی با $x_\circ$ دارد ، مقداری از تابع $f(x)$ متناظر باشد که با $f(x_\circ)$ درنقطه $x_\circ$ تفاوت کمی داشته‌باشد . بنابراین اگرنمومتغیرمستقل یعنی $x-x_\circ$ کوچك‌باشد، بایستی متناظراً نمو تابع یعنی $f(x)-f(x_\circ)$ هم کوچك باشد . بزبان دیگر اگرنمو متغیر مستقل یعنی $x-x_\circ$ بسمت صفرمیل کند ، نمو $f(x)-f(x_\circ)$ تابع هم‌بنوبه خود بایستی بسمت صفرمیل نماید که بصورت زیرنوشته میشود :

$$\lim_{x-x_\circ\to \circ}[f(x)-f(x_\circ)]=\circ \qquad (۸)$$

در حقیقت این رابطه ، تعریف اتصالی بودن تابع در نقطه $x_\circ$ است .

تابع $f(x)$ را **در نقطه $x_\circ$ اتصالی** گویند وقتی که تساوی (۸) برقرار باشد .

تعریف دیگری را هم ذکر کنیم :

تابع $f(x)$ را **بازاء همه مقادیر واقع برپاره خط مفروضی اتصالی گویند** وقتی که درهرنقطه $x_\circ$ از این پاره خط متصل باشد یعنی برای‌هر نقطه آن ، تساوی (۸) برقرار باشد .

بنابراین برای اینکه بتعریف ریاضی خاصیتی ازتابع برسیم که باین ترتیب‌بیان میشود : منحنی نمایش تغییرات تابع یك منحنی متصل (بمعنی معمولی این‌اصطلاح) است . لازم است که ابتدا خاصیت موضعی اتصال را تعریف کنیم (اتصال در نقطه $x_\circ$) و سپس براساس آن اتصال تابع را روی یك پاره خط کامل تعریف نمائیم .

این تعریف که در اوایل قرن گذشته و بوسیلهٔ کوشی داده شد ، درآنالیزریاضی

معاصر مورد قبول همه است . بررسی نمونه های مشخص زیادنشان داد که این تعریف با تصوری که درعمل از توابع اتصالی‌داریم، و مثلا تصوردرباره منحنی‌های متصل، تطبیق می کند .

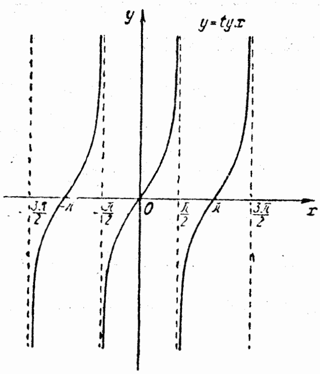
بعنوان نمونه توابع اتصالی ، میتوان از توابع x^n و $\sin x$ و $\cos x$ و a^x و $\log x$ و $\arcsin x$ و $\arccos x$ که از دوره ریاضیات مقدماتی دبیرستانی برای خواننده روشن شده است ، نام برد . همه توابع نامبرده بازاءِ نقاط واقع برپاره خطهائی که مقادیر x را معین می کنند ، اتصالی است .

اگر توابع متصل را جمع، تفریق ، ضرب ویا تقسیم کنیم (البته در تقسیم‌بازاء مقادیری که مخرج را مساوی صفرنکند) ، مجدداً توابع اتصالی بدست خواهیم آورد. ولی در تقسیم ، برای مقادیری مانند x_0 که بازاءِ آنها مخرج مساوی صفر میشود ، اتصالی بودن تابع نقض میشود . نتیجه چنین تقسیمی اینست که تابع‌درنقطه x_0 انفصالی میشود .

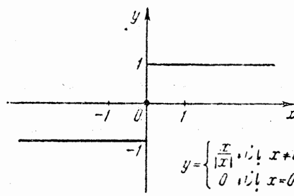
تابع $y = \frac{1}{x}$ را میتوان نمونه‌ای از اینگونه توابع دانست، این تابع درنقطه $x = 0$ انفصالی است . منحنی نمایش تغییرات یك عده از توابع انفصالی دیگر در شکل ۹ داده شده است (صفحه۱۴۰) .

بخواننده توصیه می کنیم که این منحنی‌هارا بادقت بررسی کند. متذکر میشویم که توابع اتصالی مختلف‌اند : گاهی با نزدیك شدن x به نقطه x_0 (که درآنجا تابع انفصالی است) ، برای $f(x)$ حدی وجود داردولی این‌حد با $f(x_0)$مخالف است‌وگاهی چنین‌حدی اصلا وجود ندارد . (شکل ۹ــc : $y = \sin\frac{1}{x}$) . گاهی ممکن است که اگر x از یك جهت به x_0 نزدیك شود $f(x) - f(x_0)$ بسمت صفر میل کند ولی اگرازجهت دیگر $x \to x_0$ ، مقدار $f(x) - f(x_0)$ بسمت صفرمیل نکند. البته دراینجا هم تابع انفصالی است (اگرچه دراین نقطه «از یکجهت اتصالی» است). همه این حالات را میتوان روی منحنی‌هائی که رسم شده است ، پیدا کرد .

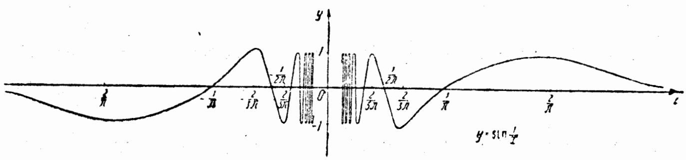
بعنوان‌تمرین‌خواننده‌بااین‌سؤال‌جواب‌بدهد که‌توابع $\frac{\sin x}{x}$ ، $\frac{1-\cos x}{x^2}$ و $\frac{x^3-1}{x-1}$ و $\frac{tgx}{x}$ درنقاطی که مبهم‌اند (درنقاطی که مخرج را مساوی صفر می کند) بایستی مساوی چه مقداری شوند ، تا اینکه متصل باشند وآیا چنین اعدادی رامیتوان



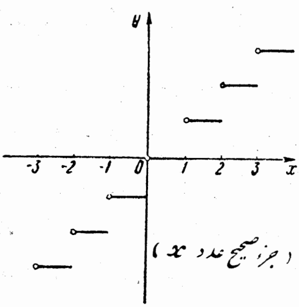
ش ۹-a



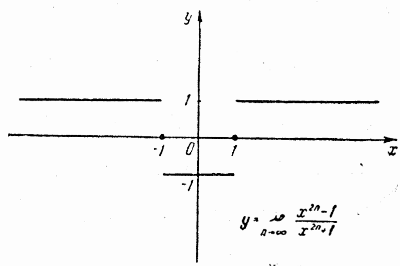
ش ۹-b



ش ۹-c



ش ۹-d



ش ۹-e

برای توابع tgx ، $\frac{۱}{x-۱}$ ، $\frac{x-۲}{x^۲-٤}$ پیدا کرد ؟

توابع انفصالی ، بسیاری از جریانهای جهشی را که در طبیعت با آنها برخورد می کنیم ، منعکس می کند . مثلا مقدارسرعت جسم دراثر ضربه بشکل جهشی تغییر پیدا می کند . غالب تغییرات کیفی بشکل جهشی انجام میشود. درقسمت دوم این فصل مثالی ازتابع $Q=f(t)$ را ذکر کردیم که رابطه بین‌مقدار حرارت مقدار معینی از آب (یا یخ) را با درجه حرارت بیان می کند . درحوالی نقطه ذوب یخ باتغییر t مقدار حرارت $Q=f(t)$ بشکل جهشی تغییرمی کند .

در آنالیز غالباً با توابع منفصل هم مثل توابع متصل سروکار داریم . بعنوان نمونه‌ای ازتوابع بغرنج‌تر ، میتوان از تابع ریمان ، که دارای بی‌نهایت انفصال است ، نام برد. این تابع بازاءِکلیه مقادیر گنگ‌مساوی باصفروبازاءِکلیه مقادیر گویا که‌بشکل $x=\frac{p}{q}$ باشد ($\frac{p}{q}$ کسر غیر ممکن‌التحویل است) مساوی با $\frac{۱}{q}$ است.
این تابع درنقاط گویا منفصل ودر نقاط گنگ متصل است . با تغییرمختصری در این تابع ، بسادگی میتوان نمونه تابعی را بدست آورد که در تمام نقاطش منفصل باشد . [۱]

متذکرمیشویم که آنالیز معاصر حتی در مورد اینگونه توابع بغرنج هم قوانین جالبی کشف کرده که دررشته مستقلی ازآنالیزبنام تئوری توابع با متغیر حقیقی بررسی میشود . ریاضی‌دانان شوروی و بخصوص مکتب مسکوی توابع ودیعه بزرگی در این رشته ریاضی که در ۵۰ ساله اخیر با سرعت خارق‌العاده‌ای تکامل پیدا مـی کند باقی گذاشته‌اند.

۱ـ کافی است فرض کنیم که درنقاط گنگ مساوی با صفر نباشد ومثلا مساوی‌با واحد باشد .

۵

مشتق

یکی دیگراز مفاهیم اساسی آنالیزمفهوم **مشتق** است . دو مسئله را که مشتق ازحل آنها بوجودآمده است انتخاب می کنیم :

سرعت . درمقدمه این فصل سرعت جسمی را که در حال سقوط آزاد بـاشد معین کردیم . برای اینکارابتدا سرعت متوسط را درمسافت کوچکی پیدا کردیم و سپس با انتقال حدی ، بسرعت درمکان ولحظه‌مفروض رسیدیم . برای تعیین سرعت لحظه‌ای هر حرکت غیریکنواخت دیگری هم میتوان اساساً از همین طریق استفاده کرد . در حقیقت فرض کنید که‌تابع :

$$S=f(t)$$

رابطه مسافت پیموده شده S یك نقطهٔ مادی را ، با زمان t بیان کند . بـرای پیدا کردن سرعت در لحظه $t=t_0$ ، فاصله زمانی از t_0 تا t_0+h $(h\neq 0)$ را مطالعه می کنیم . پس ازاین مدت نقطهٔ مادی باندازه مسافت :

$$\Delta S=f(t_0+h)-f(t_0)$$

راطی کرده است . سرعت متوسط V_m در این فاصله به h مربوط خواهد بود :

$$V_m=\frac{\Delta S}{h}=\frac{1}{h}\left[f(t_0+h)-f(t_0)\right]$$

با کوچك کردن h بسرعت واقعی درلحظه t_0 نزدیك‌ترمیشویم . از آنجا نتیجه میشود که سرعت حقیقی درلحظه t_0 برابراست با نسبت نمومسافت به نمو زمان وقتی که‌نمو زمان بسمت صفرمیل کند (درحالیکه همیشه مخالف صفرباقی بماند) :

$$V = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

محاسبه سرعت حرکتهای مختلف ، موکول باین میشود که بتوانیم این حد را برای توابع مختلف $f(t)$ پیدا کنیم .

مماس . برای جستجوی حدی کاملا شبیه بآنچه که گفته شد مثال دیگری میآوریم ، این دفعه بسراغ هندسه رفته و درباره رسم مماس برمنحنی مسطحه دلخواه بحث می کنیم :

فرض کنیم که C منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ و A نقطه‌ای از منحنی C بطول x_0 باشد (شکل ۱۰) چه خطی درنقطه A برمنحنی C مماس‌است؟ در هندسه مقدماتی این سؤال وجود ندارد ، برای یکی از منحنی‌هائی که در هندسه مقدماتی مطالعه میشود ، یعنی دایره ، مماس‌عبارت ازخطی بود که تنهایك نقطه‌مشترك با دایره داشته باشد . ولی برای سایرمنحنی‌ها ، این تعریف با تصور روشنی که ازنقطه «تماس» داریم تطبیق نمی کند . مثلا واضح است که از دوخط L و M که درشکل ۱۱ نشان داده شده است ، اولی برمنحنی مفروض (که یك منحنی سینوسی است) مماس نیست ، اگرچه تنها یك نقطه مشترك باآن دارد ، ولی خطدوم با منحنی نقاط‌مشترك زیادی دارد وبا وجود این درهریك از این نقاط برمنحنی مماس است .

برای اینکه تعریف مماس را پیدا کنیم ، روی منحنی C (شکل ۱۰) نقطهٔ دیگری مانند A' متمایز از A وبطول x_0+h درنظر می گیریم ؛ قاطع AA' را رسم کرده و زاویه‌ای راکه این قاطع با محور xها تشکیل می‌دهد β می‌نامیم . اکنون نقطهٔ A' را روی منحنی C بنقطهٔ A نزدیك میکنیم . اگر ضمن این عمل قاطع AA' بسمت یك وضع حدی میل کند ، درآنصورت‌خط T که این‌وضع حدی‌را دارد مماس درنقطه A نامیده میشود . واضح است که زاویه α ، یعنی‌زاویه‌ای که خط T با محور xها تشکیل میدهد باید مساوی با حد زاویه متغیر β باشد .

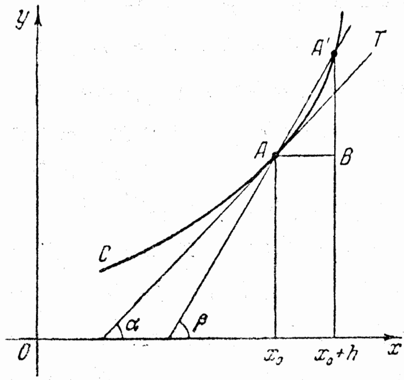
مقدار $tg\beta$ از مثلث ABA' (شکل ۱۰) بسادگی معین می‌شود :

$$tg\beta = \frac{BA'}{AB} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

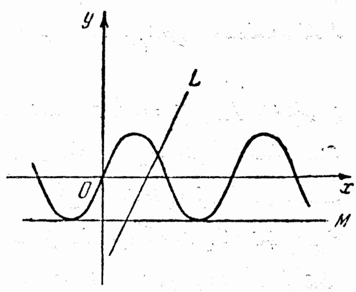
وبرای حالت حد باید داشته باشیم :

$$tg\alpha = \lim_{A' \to A} tg\beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

یعنی تانژانت زاویه میل مماس مساوی است با حد نسبت نموتابع $\mathbf{f(x)}$ درنقطه $\mathbf{x_0}$ بنمو متغیرمزبوطه ، وقتی که نمومتغیر بسمت صفرمیل کند (درحالیکه همیشه مخالف صفرباقی می‌ماند) .



ش ۱۰



ش ۱۱

بازهم‌مثال دیگری که منجربجستجوی حدی شبیه بحدبالامی‌شودذکرمی کنیم: از سیمی شدت جریان‌متغیری‌عبور می کند . فرض کنیم تابع $\mathbf{Q=f(t)}$ معین‌بوده و مقدارالکتریسیته‌ای‌را که ازمقطع ثابت سیمی عبورمی کند برحسب‌زمان $\mathbf{t}$ بیان‌نماید. درفاصله زمانی از $\mathbf{t_0}$ تا $\mathbf{t_0+h}$ مقدارالکتریسیته$\Delta\mathbf{Q}$ برابربا$\mathbf{f(t_0+h)-f(t_0)}$ از این مقطع عبور می کند . شدت جریان متوسط در این مدت برابر است با :

$$\mathbf{I_m=\frac{\Delta Q}{h}=\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}}$$

حد این نسبت وقتی که $\mathbf{h\to 0}$ ، شدت جریان را درلحظه زمانی $\mathbf{t_0}$ بما می‌دهد .

$$\mathbf{I}=\lim_{\mathbf{h\to 0}}\mathbf{\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}}$$

هرسه مسئله‌ای راکه طرح کردیم ، اگرچه مربوط به رشته های مختلف دانش بشری بود : مکانیك ، هندسه و نظریه الکتریسیته ، منجر بیك‌عمل خاص ریاضی شد که بایستی روی تابع‌انجام‌داد : بایستی حد نسبت نموتابع را به $\mathbf{h}$ (نمو متغیر متناظر با آن) وقتی که $\mathbf{h\to 0}$ پیدا کرد . بسادگی میتوانستیم مسائل‌کاملا مختلف دیگری هم بآنچه گفتیم اضافه کنیم که حل آنها منجر بهمین عمل شود . مثلا سئوال مربوط

بسرعت فعل‌وانفعالات شیمیائی‌وسئوال مربوط‌بتراکم‌وغلظت ماده‌ای که بطور یکنواخت تقسیم نشده وغیره بهمین عمل منجرمیشود . بعلت نقش فوق‌العاده‌ای که این عمل در توابع بعهده دارد . اسم خاصی بنام دیفرانسیل گیری تابع روی آن نهاده‌اند . نتیجه این عمل را **مشتق** می‌نامند .

باین ترتیب **مشتق تابع** $y = f(x)$ ویا دقیق‌تر **مقدارمشتق در نقطه مفروض** x عبارتست ازحد[1] نسبت نمو $f(x+h) - f(x)$ تابع به h یعنی‌نمو متغیر ، وقتی که‌نمومتغیربسمت‌صفرمیل کند. غالباً h را بهΔx و $f(x+h)-f(x)$ را به Δy نشان می‌دهند و در اینصورت تعریف مشتق را بطور خلاصه چنین‌می‌نویسند:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

واضح است که مقدار مشتق مربوط بمقداری از x است که مشتق در آنجاپیدا شده است . بنابراین مشتق تابع $y = f(x)$ بنوبه خودتابعی است از x . برای‌مشتق علامت زیررا قبول کرده‌اند :

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{حد}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

متذکرمیشویم که علامتهای دیگری هم برای مشتق قبول شده است :

$$y'_x \quad \text{یا} \quad y' \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{یا} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

بایدمتذکرشد که‌علامت $\frac{dy}{dx}$ از نظرنوشتن مثل کسراست ، اگر چه بعنوان علامت‌واحدی برای مشتق‌بحساب می‌آید. درقسمت بعدخواهیم دید که صورت ومخرج این «کسر» مفهوم مستقلی کسب خواهد کرد که در عین حال نسبت آنها با مشتق تطبیق خواهد کرد وباین ترتیب این شکل نوشتن را تبرئه خواهد نمود.

اکنون نتایج امثله‌ای را که در بالا نام بردیم میتوان باین ترتیب تنظیم کرد :
سرعت نقطه‌ای که مسافت طی شده بوسیله آن یعنی S، تابعی است از زمان:

۱ــ بدیهی است این تعریف برای موقعی است که حد نــامبرده وجود داشته باشد ، درحالت عکس می‌گویند که تابع درنقطه مورد مطالعه x دارای مشتق نیست .

$S = f(t)$ ، برابراست با مشتق این تابع :

$$V = S' = f'(t)$$

بطورخلاصه : سرعت عبارتست ازمشتق مسافت نسبت بزمان .

تانژانت زاویه میل مماس برمنحنی $y = f(x)$ درنقطه بطول x مساوی‌است با مشتق تابع $f(x)$ دراین نقطه :

$$tg\alpha = y' = f'(x)$$

شدت جریان I در لحظه t ، اگر $Q = f(t)$ رابطه‌ای باشد که بکمك آن بتوان مقدار الکتریستیه‌ای را که درمدت t ازمقطع سیم عبور کرده است ، معین کرد برابراست با مشتق آن :

$$I = Q' = f'(t)$$

تذکر زیر را میدهیم : سرعت حرکت غیر یکنواخت در لحظه مفروض یك مفهوم صرفاً فیزیکی است که نتیجه‌ای از عمل وپراتیك است وبشردرنتیجه ملاحظه و بررسی تعداد زیادی حرکات مشخص مختلف بآن رسیده است .

مطالعه حرکت غیریکنواخت جسم در قسمتهای مختلف مسافت آن ، مقایسه حرکات مختلفی که درآن واحدصورت‌می‌گیردو بخصوص مطالعه پدیده برخورداجسام: اینها مصالح واقعی‌هستند که‌منجربشناخت مفهوم‌فیزیکی سرعت حرکت غیریکنواخت درلحظه مفروض شده است . ولی تعریف دقیق سرعت ایجاب‌میکرد که وسیله تعیین مقدار عددی این سرعت هم فراهم شود . انجام این‌کار بکمك مفهوم مشتق امکان‌پذیر شد .

در مکانیك ، طبق تعریفی که از سرعت شده است : مقدار سرعت جسمی که طبق قانون $S = f(t)$ حرکت می کند درلحظه t مساوی است بامشتق تابع $f(t)$ بازاء مقدار t .

استدلالهای ابتدای این قسمت ، ازیکطرف ضروری بودن وجود مشتق رااثبات کرد و ازطرف دیگرتعریف سرعت را درلحظه معین ، بشکلی که دربالا فرموله کردیم ، پایه گذاشت .

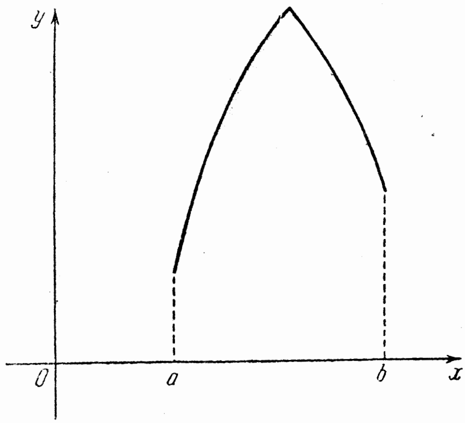
وقتی که مسئله مربوط به جستجوی سرعت نقطه‌ای راکه دارای حرکت غیر یکنواخت است مطرح کردیم تنها یك تصورتجربی درباره مقدار آن داشتیم و تعریف دقیق آنرا نمی‌دانستیم ولی در نتیجه یك تجزیه و تحلیل مناسب به تعیین دقیق مقدار سرعت در لحظه مفروض رسیدیم . این مقدار عبارتست ازمشتق مسافت نسبت بزمان . نتیجه بدست‌آمده اهمیت‌عملی فوق‌العاده دارد زیرا براساس‌این تعریف ، تصورتجربی‌ما

درباره سرعت تکمیل‌ترشده وامکان محاسبه‌آن هم بدست‌آمد .

بدیهی است آنچه هم که درباره شدت جریان و بسیاری مفاهیم دیگر گفتیم ، سرعت این و یا آن جریان Procés (جریان فیزیکی ، شیمیائی و غیره) را معین می کند .

حالتی راکه هم‌اکنون متذکرشدیم ، نمونه‌ای از موارد فراوان شبیه بآنست و نشان میدهد که چگونه عمل Pratique ما رابمفهوم معینی که جنبه واقعی‌دارد(مانند سرعت ،کار، تراکم ، سطح وغیره) هدایت می کند . وریاضیات‌هم کمك‌می کند تااین مفهوم هرچه دقیق‌تر تعریف شود . پس ازاین مراحل است که امکان پیدا می کنیم در محاسبات مورد احتیاج با این مفاهیم عمل کنیم .

درابتدای فصل متذکرشدیم که مفهوم مشتق قبل از همه بعنوان نتیجه کوششی که قرنها درجهت حل مسائل مربوط برسم مماس برمنحنی‌وپیداکردن سرعت‌حرکت غیریکنواخت انجام می گرفت ، بوجود آمد . مسائلی شبیه بآنچه گفته شد و مسئله مربوط به محاسبه سطوح ،که قبلا درباره آنها صحبت شد ، علاقه ریاضی‌دانان را از همان دوران باستان جلب کرده بود . با وجود این حتی در قرن شانزدهم ، چه نحوه طرح این مسائل و چه روش حل آنهاکاملا خصوصی بود . مصالح و مواد اولیه فراوانی که در اینجهت جمع‌آوری شده بود بصورت دستگاهی درآمد ودر قرن هفدهم درآثار نیوتون ولایب نیزبصورت یك نظریه تنظیم شد . البته اولر Léonard Euler هـم در سازمان دادن به اساس آنالیز معاصر سهم زیادی دارد .



ش ۱۲

ولی پایه هائی که نیوتون ولایپ نیز ومعاصرین آنها برای این کشفیات بزرگ ریاضی گذاشتند ، ازنظرمنطقی ضعیف بود ، دراسلوب قضاوت آنها ودرمفاهیمی که آنها بکار می‌بردند ابهامات زیادی ، ازنقطه نظرما ، وجود داشت. خود ریاضی‌دانان آنزمان هم این مطلب را می‌دانستند . گواه این مطلب بحث ومجادله شدیدی است که درباره این مسائل بوسیلهٔ نامه بین آنها جریان داشته است . ریاضی‌دانان آنزمان (قرنهای ۱۷ و۱۸) بخصوص فعالیتهای صرفاً ریاضی خود را با فعالیتهای تحقیقی دررشته های مختلف طبیعی (فیزیك . مکانیك ، شیمی وتکنیك) بطورجدی مربوط میکردند . طرح مسائل ریاضی از احتیاجات عملی زمان آنها واز آرزوی آنها بفهم پدیده های مختلف طبیعی سرچشمه می گرفت . پس از آنکه مسئله حل میشدمورد تحقیق عملی قرارمیگرفت وبخصوص همین وضع جهت جستجوهای ریاضی را معین می کرد .

امثله برای محاسبه مشتقات . تعریف مشتق بعنوان :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

امکان می‌دهد که مشتق هرتابع مشخص را پیدا کنیم .

این مطلب را باید گفت که ممکن است حالاتی وجود داشته باشد که تابع در این و یا آن نقطه و یا حتی در بسیاری نقاط اصلا مشتق نداشته باشد ، یعنی نسبت $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ وقتی که $h \to 0$ بسمت یك حدنهائی میل نکند. همانطور که میدانیم این حالت برای هرنقطه انفصال تابع $f(x)$ صادق است ، زیرا درآنجا در نسبت :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (۱۰)$$

وقتی که مخرج بی‌نهایت کوچك شود ، صورت بسمت صفرمیل نمی کند .

مشتق میتواند در نقطه‌ای هم که تابع متصل است وجود نداشته باشد . نمونه ساده این‌نقطه ، نقطهٔ انکسار(زاویه‌ای) روی‌منحنی نمایش تغییرات‌است (شکل۱۲). در این نقطه منحنی نمایش تغییرات مماس معینی‌ندارد ومتناظراً تابع هم‌مشتق‌نخواهد داشت . درچنین نقاطی برحسب اینکه h از طرف راست ویا از طرف چپ بسمت‌صفر میل کند ، رابطه (۱۰) بمقادیرمختلفی نزدیك میشود و اگر h بطوردلخواه بسمت‌صفر

میل نماید ، نسبت (۱۰) دارای هیچ حدی نخواهد بود .

نمونه بغرنج‌تر از توابعی که دارای مشتق نیستند تابع زیراست :

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{۱}{x} & \text{برای } x \neq ۰ \\ ۰ & \text{برای } x = ۰ \end{cases}$$

منحنی نمایش تغییرات این تابع درشکل ۱۳ نشان داده شده است . درنقطه $x = ۰$ این تابع دارای مشتق نیست ، زیرا همانطور که از منحنی نمایش تغییرات آن دیده میشود ، دراینحالت، حتی وقتی که $A \to ۰$ (درحالی که ازیکطرف به صفر نزدیک میشود) . قاطع oA بسمت وضع معینی میل نمی‌کند . بلکه همیشه بین oM و oL نوسان می‌کند و برعکس . بنابراین نسبت (۱۰) دراینحالت دارای حدی نیست ، حتی وقتی که h ، با حفظ علامت ، بسمت صفرمیل نماید .

بالاخره متذکرمیشویم که میتوان تابع متصلی داد که بشکل تحلیلی و بکمك فرمول بیان شده باشد ولی درهیچیك از نقاطش دارای مشتق نباشد . نمونه چنین‌تابعی برای نخستین‌باردرقرن گذشته بوسیله ریاضی‌دان مشهورآلمانی وایرشتراس Wierstrass مطرح شد .

باین ترتیب مجموع توابعی که قابل دیفرانسیل گیری هستند ، خیلی محدودتر از مجموع توابع اتصالی است .

محاسبه مشخص مشتق توابع ساده را ذکر کنیم .

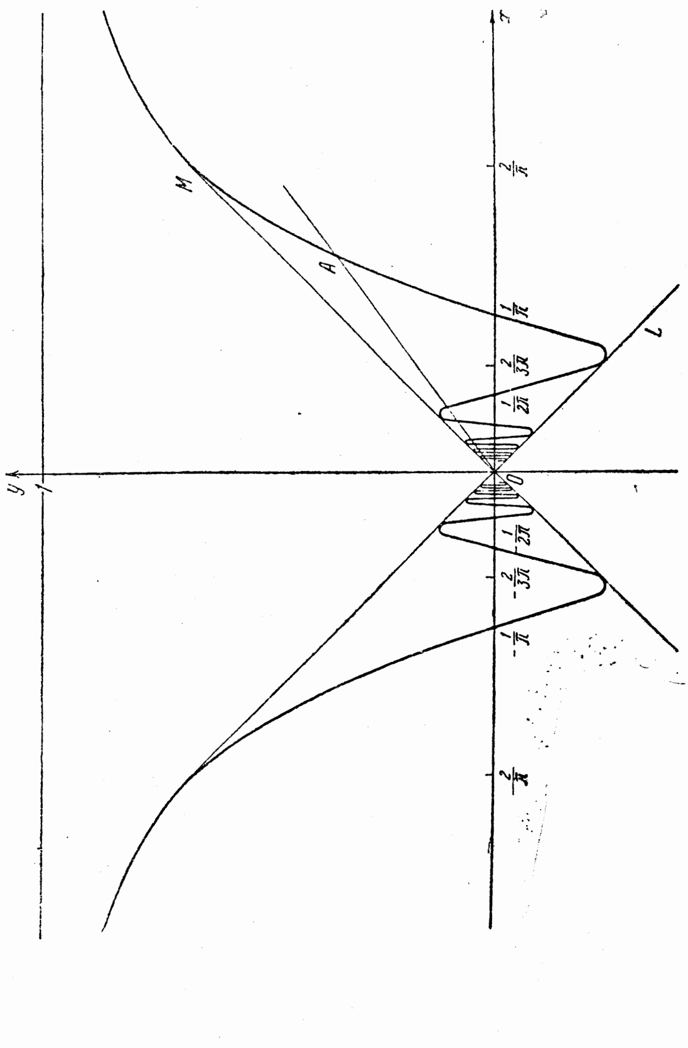
۱ ـ $y = c$ ، وقتی که c ثابت باشد . مقدار ثابت را میتوان بعنوان حالت خاصی از تابع فرض کرد که درآن بازاءِ هرمقداردلخواه x ، مقدار تابع‌مساوی باهمان مقدار ثابت باشد . نمایش تغییرات این تابع خط راستی است موازی با محور xها و بفاصله c ازآن . این خط با محور xها زوایه $\alpha = ۰$ را تشکیل میدهد و از آنجا مشتق مقدار ثابت هم مساوی صفرمیشود :

$$y' = (c)' = ۰$$

ازنقطه نظرمکانیك این تساوی باین معناست که سرعت یك نقطهٔ ثابت مساوی با صفر است .

۲ ـ $y = x^۲$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^۲ - x^۲}{h} = ۲x + h$$



ش ۱۳

وقتی که $h \to 0$ ، درحد $2x$ را بدست میآوریم[1]. بنابراین :

$$y' = (x^2)' = 2x$$

۳ ـ $y = x^n$ (n عددی است صحیح ومثبت) .

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\frac{x^n + nx^{n-1} \cdot h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot h^2 + \ldots\ldots + h^n - x^n}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot h + \ldots\ldots + h^{n-1}$$

وقتی که $h \to 0$ ، کلیه جملات ، ازجمله دوم ببعد بسمت صفر میل خواهد کرد بنابراین :

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

این رابطه برای هرمقدار دلخواه n : مثبت ، منفی ، کسری وحتی گنگ هم صحیح است (اگرچه راه اثبات آن بطریق دیگری است) ومااز این حقیقت بدون اینکه آنرا اثبات نمائیم ، استفاده میکنیم ، بنابراین مثلا :

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0)$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad (x \neq 0)$$

$$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

$$(x^{\pi})' = \pi x^{\pi - 1} \qquad (x > 0)$$

۴ ـ $y = \sin x$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin\frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} =$$

---

۱ ـ همیشه فرض ماآینستکه $h \neq 0$ است .

$$=\frac{\sin\frac{h}{۲}}{\frac{h}{۲}}\cos\left(x+\frac{h}{۲}\right).$$

اما همانطور که قبلا روشن کردیم وقتی که $h\to ۰$ کسر اول بسمت واحد و $\cos(x+h)$ بسمت $\cos x$ میل میکند. بنابراین مشتق سینوس برابر با کسینوس است :

$$y'=(\sin x)'=\cos x$$

استدلال این مطلب را که شبیه استدلال بالاست بعهدهٔ خواننده می گذاریم تا ثابت کند که :

$$(\cos x)'=-\sin x$$

۵ ـ قبلا نشان دادیم (درصفحه۱۳۵) که :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=e=۲/۷۱۸۲۸....$$

همچنین روشن کردیم که برای محاسبهٔ این حد ، این وضع که n مقدار صحیح و مثبتی باشد ، دارای نقش اساسی نیست . این مطلب مهم است که مقدار بی نهایت کوچک $\frac{۱}{n}$ (که بواحد اضافه میشود) وقدر مطلق قوه n که تا بی‌نهایت صعودی است عکس یکدیگرند.

با قبول این حکم بسادگی میتوان مشتق $y=\log_a x$ را پیدا کرد :

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{۱}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=$$

$$=\frac{۱}{x}\log_a\left(۱+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

اتصالی بودن لگاریتم اجازه میدهد که درحد ، مقدار زیر علامت لگاریتم را بحد آن که مساوی e است تبدیل کنیم :

$$\underset{h\to ۰}{\text{حد}}\left(۱+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=e$$

(در اینحالت نقش $n\to\infty$ را مقدار $\frac{x}{h}$ که صعودی است بازی میکند) . در نتیجه قاعده دیفرانسیل گیری لگاریتم بدست میآید :

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

این رابطه بخصوص درموردی که خود عدد e بعنوان پایه لگاریتم قبول شود ، خیلی ساده میشود . لگـاریتم در این پایه **لگاریتم طبیعی** نامیده میشود به $\ln x$ نشان داده میشود . میتوان نوشت :

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

و یا بصورت دیگر :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

٦

قواعد دیفرانسیل گیری

از مثالهائی که دربالا ذکر کردیم ، ممکن است چنین بنظر برسد که محاسبه مشتق هرتابع جدید ، مستلزم کشف روشهای جدیداست . اما اینطورنیست . این‌وضع که ما امکان داریم بوسیلهٔ روش ساده وواحدی مشتق هرتابع«مقدماتی»را بدست‌آوریم، (تابع مقدماتی یعنی‌تابعی که بتوان‌آنرا بوسیلهٔ فرمولی بیان کرد که از ترکیب اعمال اساسی جبر،توابع‌مثلثاتی ، بقوه رساندن ولگاریتم گرفتن تشکیل‌شده باشد) ، بتکامل ریاضیات کمك‌زیادی کرد. اساس این روش‌همان چیزی‌است که**قواعد دیفرانسیل گیری** نامیده‌میشود ، این قواعد ازیك سلسله قضایا تشکیل شده‌است که بکمك‌آنها میتوان‌مسائل پیچیده‌تررا بمسائل ساده‌تر تبدیل نمود .

ما دراینجا قواعد دیفرانسیل گیری را ذکرمی کنیم و کوشش می‌نمائیم که در نتیجه‌گیریهای آن رعایت اختصار را بنمائیم . اگر خواننده مایل است که ازاین‌فصل فقط یك تصور کلی در باره آنالیز بدست آورد ، میتواند ازاین قسمت صرفنظر کند وتنها یك مطلب را بخاطرداشته باشد که وسیلهٔ مشخصی برای پیدا کردن‌مشتق هرتابع مقدماتی وجود دارد. البته دراینصورت بایستی‌بناچاربمحاسباتی که درامثله بعدی خواهد آمد اعتماد کند .

مشتق مجموع . فرض کنیم y تابعی است از x که باین ترتیب بیان شده است :

$$y = \varphi(x) + \Psi(x)$$

که در آن $u = \varphi(x)$ و $v = \Psi(x)$ توابع معینی از x هستند. علاوه بر آن فرض می کنیم که بتوانیم مشتق توابع u و v را بدست آوریم. مشتق تابع y راچگونه باید پیدا کرد؟ جواب آن ساده است:

$$y' = (u + v)' = u' + v' \qquad (۱۱)$$

درحقیقت به x نموی مانند Δx می‌دهیم، u و v و y بنوبه خودنموهائی مانند Δu و Δv و Δy بدست میآورند که در تساوی زیرصادق‌اند:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

از آنجا :[1]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

و پس از آنکه $\Delta x \to ۰$، در حد درست همان فرمول(۱۱) رابدست‌خواهیم آورد و البته این‌بشرطی است که توابع u و v هم دارای مشتق باشند.

بطریق مشابهی میتوان قاعده دیفرانسیل گیری تفاضل دو تابع رابدست‌آورد:

$$(u - v)' = u' - v' \qquad (۱۲)$$

مشتق حاصل ضرب – تنظیم قاعده مشتق حاصل ضرب کمی پیچیده‌تر است. حاصل ضرب دوتابع (که خود آنها دارای مشتق‌باشند) دارای مشتق بوده و این مشتق برابراست با مجموع حاصل ضرب تابع اول درمشتق تابع دوم وتابع دوم در مشتق تابع اول، یعنی:

$$(u.v)' = u\,.\,v' + v\,.\,u' \qquad (۱۳)$$

درحقیقت به x نموی مانند Δx میدهیم. در اینصورت برای توابع u و v و $y = u\,.\,v$ هم نموهای Δu و Δv و Δy که دررابطه زیر صدق می کنند بدست میآید:

$$\Delta y = (u + \Delta u).(v + \Delta v) - u.\,v = u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v$$

که از آنجا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\,.\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,.\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u.\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

در حد یعنی پس از آنکه $\Delta x \to ۰$، دو جمله اول طرف راست رابطه بالا

---

[1] دراینجا همیشه $\Delta x \neq ۰$ است.

مساوی با دوجمله طرف راست رابطه(۱۳) شده و جمله سوم ازبین می‌رود.[۱] و بایـن ترتیب درحد رابطه(۱۳) را بدست می‌آوریم.

درحالت خاص، وقتی‌که: $v = c =$ مقدار ثابت باشد خواهیم داشت:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' + u \cdot c' = c \cdot u' \qquad (۱۴)$$

زیرا مشتق مقدارثابت برابر باصفراست.

مشتق خارج قسمت. فرض‌کنید $y = \dfrac{u}{v}$ باشد که در آن u و v توابعی باشند که برای مقدار مفروض x دارای مشتق بوده و ضمناً بازاءِ این مقدار x، $v \neq 0$ باشد، واضح است که:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)\, v}$$

و از آنجا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)\, v} \longrightarrow \frac{vu' - uv'}{v^2} \qquad (\Delta x \to 0)$$

اینجا هم دوباره از این مطلب استفاده کردیم که برای تابع v، که دارای‌مشتق است، وقتی‌که $\Delta x \to 0$ حتماً Δv هم بسمت صفرمیل می‌کند. بنابراین:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \qquad (۱۵)$$

امثله‌ای برای قواعد بالا ذکر کنیم:

$$(2x^3 - 5)' = 2\,(x^3)' - (5)' = 2 \times 3x^2 - 0 = 6x^2$$

$$(x^2 \cdot \sin x)' = x^2\,(\sin x)' + (x^2)' \cdot \sin x =$$
$$= x^2 \cos x + 2\, x \sin x$$

---

۱ ـ وقتی‌که $\Delta x \to 0$، باین علت جمله آخربسمت صفر میل می کند کـه $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ بسمت عدد معینی که مساوی بامشتق v' است میل می‌نماید (و درابتدای کار فرض کردیم که v' وجود دارد) و $\Delta u \to 0$ (زیرا تابع u طبق شرط دارای‌مشتق بود واتصالی است).

$$(\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

بعهده خواننده می‌گذاریم که رابطه‌زیررا ثابت کند :

$$(\text{cotg}\, x)' = -\text{cosec}^2 x$$

مشتق عکس تابع . تابع $y = f(x)$ را که درفاصله $[a \text{ و } b]$ اتصالی و صعودی (یا نزولی) است درنظرمی گیریم ، بعداً خواهیم دید که در فاصله $[a \text{ و } b]$ ، مقدار بزرگتری از x متناظر با مقدار بزرگتر (یا کوچکتری) از y است (ش ۱۴) فرض کنیم که $c = f(a)$ و $d = f(b)$ باشد . روی شکل ۱۴ دیده‌میشود که هرمقدار y که‌درفاصله $[c \text{ و } d]$ واقع باشد با یك مقدار x ازفاصله $[a \text{ و } b]$ که‌در رابطه $y = f(x)$ صدق کند ، تطبیق می‌کند . باین وسیله، درفاصله $[c \text{ و } d]$ تابع کاملا مشخص $x = \varphi(y)$ را طرح می‌کنیم که تابع عکس $y = f(x)$ نامیده میشود . روی شکل ۱۴ دیده میشود که تابع $\varphi(y)$ اتصالی است . ضمناً در آنالیز معاصر این مطلب را براساس تحلیلی وبطوردقیق ثابت می‌کنند . حالا فرض کنید که Δx و Δy بترتیب نموهای x و y باشند . واضح است که :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \qquad \text{اگر} \qquad \Delta y \neq 0$$

رابطه بالا درحد نسبت میان مشتق تابع و مشتق عکس‌تابع را بما میدهد :

$$(16) \qquad y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

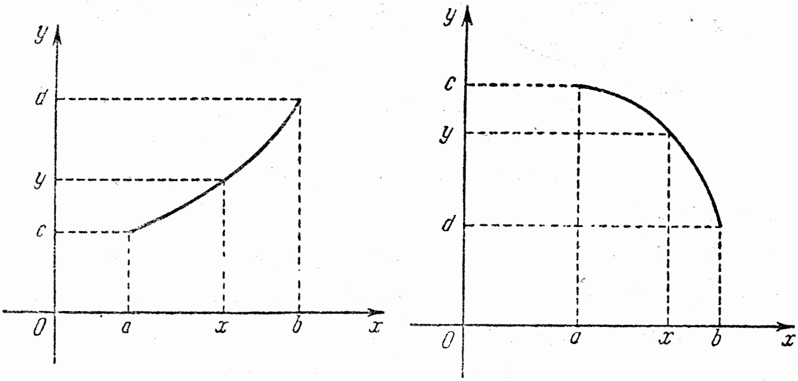
از این رابطه برای پیدا کردن مشتق تابع $y = a^x$ استفاده میکنیم . این تابع ، تابع‌عکس $x = \log_a y$ میباشد (که قبلا از آن دیفرانسیل گرفتیم) و بنابراین میتوان نوشت :

$$(17) \quad (a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}$$

$$= y \cdot \log_e a = a^x \ln a$$

وبخصوص :

$$(e^x)' = e^x$$



ش ۱٤

مثال دیگر ـ $y = \text{arc}\sin x$. تابع عکس آن $x = \sin y$ است .
بنابراین :

$$(\text{arc}\sin x)'_x = \frac{۱}{(\sin y)'_y} = \frac{۱}{\cos y} =$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^۲ y}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

جدول مشتقات . مشتق توابع مقدماتی و ساده را ذکرمیکنیم :

y	y'	y	y'	y	y'
c	$\cdot$	$\ln a$	$\frac{۱}{x}$	$\text{tg}x$	$\sec^۲ x$
x^a	$ax^{a-۱}$	$\log_a x$	$\frac{۱}{x}\log_a e$	$\text{arc}\sin x$	$\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\text{arc}\cos x$	$-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\text{arc tg}\, x$	$\frac{۱}{۱+x^۲}$

همه این فرمولها را بدست آوردیم و روشن کردیم ، بجزدو فرمول آخری، که خواننده اگرمایل باشد میتواند با استفاده ازقاعده دیفرانسیل گیری تابع عکس ،آنها را بدست آورد .

پیداکردن مشتق تابع تابع . مطالعه آخرین قاعده دیفرانسیل گیری که مشکل‌ترین آنهاست باقی مانده است . کسی که براین قاعده و قواعدی که در جدول ذکر شده مسلط باشد ، میتواند مطمئن باشد که میتواند از هر تابع مقدماتی مشتق بگیرد .

برای بکاربردن قاعده‌ای که میخواهیم ذکر کنیم بایدبطورکاملاروشنی پیش‌خود مجسم کنیم که تابعی که بایستی دیفرانسیل گرفته شود چگونه ساخته شده است ، چه اعمالی وبچه ترتیب روی متغیر مستقل x انجام گرفته است تا منجر به تابع y شده است .

مثلا برای محاسبه تابع :

$$y = \sin x^۲$$

ابتدا بایستی x را بقوه ۲ رسانید وسپس ازمقداربدست آمده سینوس گرفت. این تابع را میتوان بشکل $y = \sin u$ هم نوشت که در آن $u = x^۲$ است .

برعکس برای محاسبه تابع :

$$y = \sin^۲ x$$

بایستی ابتدا از x سینوس گرفت وسپس مقدار بدست آمده را بقوه ۲ رسانید و میتوان آنرا باین ترتیب هم نوشت : $y = u^۲$ که در آن $u = \sin x$ است .

بازهم امثله‌ای ذکر کنیم :

$$۱)\ y = (۳x + ٤)^۳ \text{ و } y = u^۳ ,\ u = ۳x + ٤$$

$$۲)\ y = \sqrt{۱ - x^۲} \text{ و } y = u^{\frac{۱}{۲}} ,\ u = ۱ - x^۲$$

$$۳)\ y = e^{kx} ,\ y = e^u ,\ u = kx$$

درحالات بغرنج‌تریك زنجیرازارتباطات ساده بدست میآید که دارای چند حلقه‌ارتباطی است . مثلا :

$$٤)\ y = \cos^۳ x^۲ ;\ y = u^۳ ;\ u = \cos v ;\ v = x^۲$$

اگر y متغیری ازتابع u باشد

$$y = f(u) \qquad (۱۸)$$

و u بنوبه خود تابعی از متغیر x باشد:

$$u = \varphi(x) \qquad (۱۹)$$

در اینصورت y ، که تابعی از u بود ، تابعی از x خواهد شد که آنرا میتوان چنین نوشت :

$$y = F(x) = f[\varphi(x)] \qquad (۲۰)$$

با بغرنج‌تر کردن این جریان میتوان فی‌المثل تابع زیررابدست آورد :

$$y = \Phi(x) = f\{\varphi[\Psi(x)]\}$$

که معادل با تساویهای زیراست .

$$y = f(u) \text{ , } u = \varphi(v) \text{ , } v = \Psi(x)$$

ویا توابع بازهم بغرنج‌تری بدست میآید که منجربزنجیری از اینگونه تساویهامیشود.

اکنون نشان میدهیم که مشتق تابع $F(x)$ که دررابطه(۲۰) معین شده‌است، وقتی که مشتق $f(u)$ نسبت به u و مشتق $\varphi(x)$ نسبت به x معلوم‌باشد، چگـونه محاسبه میشود .

به x نموی مانند Δx میدهیم ، باتوجه برابطه(۱۹) نمو Δu برای u وباتوجه برابطه(۱۸) نمو Δy برای y بدست میآید ، میتوان نوشت :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

اکنون فـرض کنید Δx بسمت صفر میـل نماید . در ضمن $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ هم‌بسمت u'_x میل می کند ، علاوه بر آن بعلت اتصالی بودن u نمـو • $\longrightarrow \Delta u$ و بنابرایـن

$y'_u \longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u}$ (طبق فرض مشتقات y'_u و u'_x وجود داشتند) .

باین ترتیب فرمول مهم مربوط به مشتق تابع تابع بدست میآید :[1]

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (۲۱)$$

اکنون مشتق توابعی راکه دربالا بعنوان مثال ذکر کردیم، بااستفاده ازفرمول (۲۱) وجدول مشتقات (صفحه۱۵۸) بدست آوریم :

---

۱ ــ برای بدست آوردن این فرمول بطورضمنی چنین فرض کردیم که با میل Δx بسمت صفر، Δu همیشه مخالف صفرباقی میماند . ولی درحقیقت اگراین حکم‌هم وجود نداشته باشد بازهم نتیجه گیری ما بقوت خودباقی است .

$$۱)\begin{cases} y = (۳x + ٤)^۳ = u^۳ \\ y'_x = (u^۳)'_u \cdot (۳x + ٤)'_x = ۳u^۲ \times ۳ = ۹(۳x + ٤)^۲. \end{cases}$$

$$۲)\begin{cases} y = \sqrt{۱ - x^۲} = u^{\frac{۱}{۲}}, \\ y'_x = (u^{\frac{۱}{۲}})'_u \cdot (۱ - x^۲)'_x = \frac{۱}{۲} u^{\frac{-۱}{۲}} (-۲x) = -\frac{x}{\sqrt{۱ - x^۲}} \end{cases}$$

$$۳)\begin{cases} y = e^{k.x} = e^u, \\ y'_x = (e^u)'_u . u'_x = e^u . k = k . e^{k.x} \end{cases}$$

اگر $y = f(u)$ و $u = \varphi(v)$ و $v = \Psi(x)$ باشد خواهیم داشت :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = y'_u (u'_v \cdot v'_x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

بسادگی میتوان این رابطه‌را برای حالتی که تعداددلخواه (ومعین) ازیك‌سلسله توابع داشته باشیم ، تکمیل کرد .

مثال :

$$٤)\begin{cases} y = \cos^۳ x^۲, \\ y'_x = (u^۳)'_u \cdot (\cos v)'_v \cdot (x^۲)'x = ۳u^۲(-\sin v) \cdot ۲x \\ \quad = -٦x \cos^۲ x^۲ \cdot \sin x^۲. \end{cases}$$

ما برای اینکه نشان دهیم چگونه مشتق تابع تابع را حساب می‌کنند ، به متغیر های‌واسطه u و v و . . . . متوسل شدیم ، ولی پس از آنکه کمی ورزیدگی پیدا کنیم میتوان خود را از این واسطه‌ها خلاص کرد وآنها را در ذهن بحساب‌آورد .

توابع مقدماتی : درخاتمه این قسمت متذکرمیشویم ، توابعی که فهرست مشتقات آنها دربالا بصورت جدول داده شد ، میتواند در اساس بعنوان تعریف توابع مقدماتی قرار گیرد وبخصوص همه توابعی که ازاین توابع ساده بکمك چهارعمل اصلی حساب و عمل تابع تابع (بشرطی که بتعداد معین انجام گرفته باشد) بدست میآید ، **مقدماتی** نامیده میشود .

مثلا چند جمله‌ای $x^۳ - ۲x^۲ + ۳x - ٥$ تابع مقدماتی است ،زیرا از توابعی بصورت x^k و بکمك اعمال حساب بدست میآید . تابع $\ln \sqrt{۱ - x^۲}$هم

مقدماتی است زیرا از چند جمله‌ای x^{2} − ۱ = u بکمك عمل $v = u^{\frac{1}{2}}$ و
سپس عمل $\ln v$ بدست آمده است .

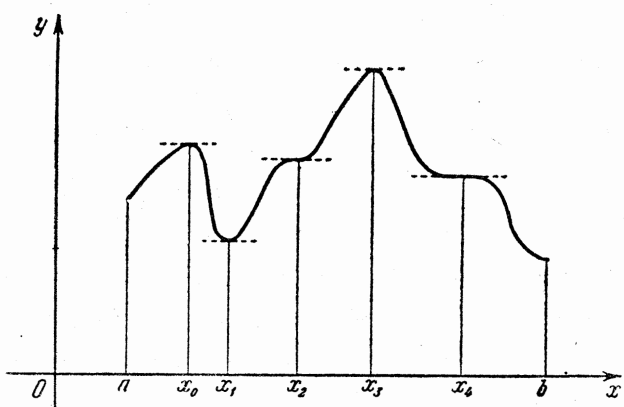
بشرطی که مشتقات ساده‌ترین توابع مقدماتی را بدانیم قواعد دیفرانسیل گیری
که دربالا ذکر شد برای پیدا کردن مشتق هرتابع مقدماتی کافی خواهد بود .

۷

ماکزیمم و می‌نیمم

جستجوی منحنی نمایش تغییرات تابع

یکی ازساده‌ترین ومهمترین موارد استفاده مشتق در نظریه ماکزیمم و می‌نیمم است . فرض کنیم که تابع $y = f(x)$ در فاصله $a \leqslant x \leqslant b$ داده شده باشد و فرض می‌کنیم که تابع در این فاصله نه تنها متصل باشد ، بلکه در تمام نقاطش دارای مشتق هم باشد .



ش ۱۵

محاسبه مشتق بما امکان میدهد که بروشنی منحنی‌نمایش تغییرات تابع‌راپیش خود تصور کنیم . در فاصله‌ای که مشتق همیشه مثبت است ، مماس بر منحنی رو ببالا

میرود ، تابع در این فاصله صعودی است یعنی هر مقدار بزرگتر x متناظر با مقدار بزرگتری از $f(x)$ است . برعکس درفاصله‌ای که مشتق منفی است ، تابع نزولی بوده و منحنی روبپائین میآید .

ماکزیمم و می‌نیمم . درشکل ۱۵ منحنی‌نمایش‌تغییرات تابع $y=f(x)$ که در فاصله $[a\text{ و }b]$ معین است ، نشان داده شده است . نقاطی از منحنی که دارای طولهای x_0 و x_1 و x_3 هستند نقاط خاصی هستند .

می‌گویند که تابع $f(x)$ درنقطه x_0 ماکزیمم‌محلی (یانسبی) دارد که‌آنرا‌اینطور هم میتوان بیان کرد : درنقطه x_0 تابع $f(x)$ بزرگتر از نقاط مجاورش می‌باشد و یا دقیق‌تربازاء همه‌مقادیر x درفاصله‌ای که‌درمجاورت‌نقطه x_0 قراردارد ، $f(x_0)\geqslant f(x)$ خواهدبود .

بهمین ترتیب می‌نیمم محلی (یا نسبی) تعریف میشود .

در تابع ما ماکزیمم محلی در نقاط x_0 و x_3 و می‌نیمم محلی در نقطه x_1 است .

درنقطه ماکزیمم یا می‌نیمم بایستی مشتق مساوی صفر باشد ، بشرطی که این نقطه در داخل فاصله $[a\text{ و }b]$ واقع باشد یعنی بردو انتهای a و b منطبق نباشد.

مطلب اخیر که خیلی هم مهم است ازخودتعریف مشتق‌بعنوان‌حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نتیجه میشود . درحقیقت باحرکت کوچکی از نقطه ماکزیمم $\Delta y \leqslant 0$ میشود . بنابراین برای مقادیر مثبت Δx نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مثبت نیست و برای مقادیر منفی Δx نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ منفی نیست و حد این نسبت (که طبق‌فرض‌وجود دارد) نمیتواند نه‌مثبت باشدونه‌منفی و تنها این میماند که صفرباشد . این مطلب متناظربا آنست که بگوئیم‌درنقاط‌ماکزیمم و می‌نیمم (معمولاکلمه «محلی» را حذف می کنیم ، اگرچه آنرا درذهن بخاطر داریم) مماس برمنحنی افقی است . در شکل ۱۵ دیده میشود که مماس برمنحنی در نقاط x_2 و x_4 هم مثل نقاط x_0 و x_1 و x_3 افقی است . اگرچه دراین نقاط نه ماکزیمم‌ونه می‌نیمم وجود ندارد . بطورکلی ، نقاطی که درآنها مشتق مساوی صفراست(نقاط ساکن Stationnaire) ، اغلب نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم خواهد بود .

جستجوی حداکثر و حداقل مقدار تابع . در بسیاری از مسائل مختلف مربوط بصناعت احتیاج پیدا می کنیم که بدانیم تابع $f(x)$ بازاء چه مقدار x (از یك فاصله معین) حداکثر ویا حد اقل مقدار را خواهد داشت .

درحالتی که بزرگترین مقدارتابع‌لازم است ، بایستی درفاصله $[a$ و $b]$ نقطه‌ای مانند $x_{.}$ چنان پیدا کرد که برای تمام مقادیر x که درفاصله $[a$ و $b]$ واقع است ، نا مساوی $f(x_{.}) \geqslant f(x)$ صحیح باشد .

در اینجا یك مسئله اساسی مطرح میشود : آیا بطورکلی چنین نقطه‌ای وجـود دارد ؟ بکمك آنالیزریاضی میتوان قضیه وجود این نقطه را اثبات کرد : اگرتابع $f(x)$ در فاصله مفروض اتصالی باشد ، لااقل یك نقطه وجود دارد که تابع بازاء آن ماکزیمم (یا می‌نیمم) است .

از آنچه که دربالا گفتیم‌نتیجه میشود که نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم را قبل ازهمه باید بین نقاط«ساکن»جستجو کرد . باستناد این‌مطلب‌وسیله معروف زیربرای‌جستجوی ماکزیمم ومی‌نیمم بدست میآید .

مشتق $f(x)$ را بدست آورده و مساوی صفر قرار میدهیم و معادله بدست‌آمده را حل می کنیم :

$$f'(x) = .$$

اگر x_1 و x_2 و . . . . . و x_n ریشه های این معادله باشد ، اعداد $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و . . . . و $f(x_n)$ را باهم مقایسه‌می کنیم . البته این مطلب را بایدبحساب آورد که ممکن است ماکزیمم ومی‌نیمم درداخل فاصله $[a$ و $b]$ نباشد ، بلکه‌درکرانهٔ آن (همانگونه که درشکل ۱۵چنین می‌نیممی وجود دارد) ویادرنقطه‌ای که تابع‌دارای مشتق نیست (شکل ۱۲) باشد . بنابراین بایستی بنقاط x_1 و x_2 و . . . . . و x_n نقاط انتهائی a و b و نقاطی را هم که بازاء آنها مشتق وجود ندارد (اگر چنین‌نقاطی وجود داشته باشد) اضافه کرد . پس از آن ، این مطلب میماند که مقادیرتابع رادراین نقاط باهم مقایسه‌کرده و بین آنها بیشترین و یا کمترین را انتخاب کنیم .

این مطلب مهم را بایستی اضافه کرد که قضیه وجود حداکثر و حداقل تابع در حالتی که تابع $f(x)$ فقط در**فاصله** $(a$ و $b)$ اتصالی است ، یعنی بازاء مجموعه‌نقاطی که در نامساوی $a < x < b$ صدق کنند ، صحت خود را از دست می‌دهد . کافی است درمقابل‌خواننده تابع $\frac{1}{x}$ را قرار دهیم که درفاصله (۱و ۰) نه ماکزیمم دارد ونه می‌نیمم .

چندمثال ذکر کنیم:

میخواهیم ازیك قطعه آهن سفید مربع شکل بضلع a، قوطی مکعب مستطیل روبازی با حداکثرحجم بسازیم ۰ اگرازگوشه های قطعه آهن سفید مربعهائی بضلع x

ببریم (در قسمت دوم همین فصل ، مثال۲را به بینید) یك قوطی بحجم زیربدست‌خواهیم آورد :

$$V = x(a-2x)^2$$

مسئله باینجا منجرمیشود که باید مقداری برای x پیدا کنیم که بازاء آن‌تابع $V(x)$ حداکثر مقدار را درفاصله $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$ داشته باشد . بکمك قواعدی که میدانیم مشتق تابع بالا را پیدا کرده ومساوی صفرقرار می‌دهیم .

$$V'(x) = (a-2x)^2 - 4x(a-2x) = 0$$

پس از حل این معادله دو ریشه بدست خواهیم آورد :

$$x_1 = \frac{a}{2} \text{ و } x_2 = \frac{a}{6}$$

باین ریشه ها انتهای چپ پاره خطی را کــه $V(x)$ بازاء نقاط آن داده شده ، اضافه می کنیم (انتهای سمت راست بر x_1 منطبق است) ومقدار تابع را در این نقاط با هم مقایسه می کنیم :

$$V(0) = 0 \text{ و } V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3 \text{ و } V\left(\frac{a}{6}\right) = 0$$

باین ترتیب در حالتی که ارتفاع قوطی $x = \frac{a}{6}$ باشد، دارای‌حداکثرحجم که‌مساوی $\frac{2}{27}a^3$ است ، خواهد بود .

مسئله مربوط بفانوس (قسمت دوم‌همین فصل مثال۳) را بعنوان مثال دوم انتخاب می کنیم . فانوس را در چه ارتفاع h آویزان کنیم تا به باند پاتیناژ حداکثر روشنائی بتابد ؟

با کمك فرمول (۳) مسئله باینجا منجر میشود که h چه مقــدار باشد تــا $T = \frac{A \cdot \sin\alpha}{h^2 + r^2}$ حداکثر بشود ؟ بجای h میتوان زاویه را α را پیدا کــرد (ش ۳ صفحه۱۱۸) ، داریم :

$$h = r \cdot tg\,\alpha$$

در نتیجه :

$$T = \frac{A}{r^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1 + tg\,\alpha} = \frac{A}{r^2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

بایستی ماکزیمم تابع $T(\alpha)$ را بین مقادیری از α که در نامساوی $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

صدق کند ، پیدا کرد . مشتق را پیدا کرده مساوی صفرقرارمیدهیم :

$$T'(\alpha)=\frac{A}{r^۲}(\cos^۳\alpha-۲\sin^۲\alpha\ .\ \cos\alpha)=۰$$

این معادله بدو معادله زیرتبدیل میشود :

$$\cos\alpha=۰\ \text{و}\ \cos^۲\alpha-۲\sin^۲\alpha=۰$$

معادلهٔ اول ریشه $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ را می‌دهد که درانتهای فاصله $(۰\text{و}\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد. معادله دوم‌رامیتوان بصورت زیر نوشت:

$$tg^۲\alpha=\frac{۱}{۲}$$

اما اگر $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ باشد خواهیم داشت $\alpha=۳۵^\circ\ ۱۵'$ و این مقدار از α است که بازاء آن تابع $T(\alpha)$ ماکزیمم میشود . (درانتهای‌فاصله، تابع کوچکتر است‌زیرا $T(\frac{\pi}{۲})=۰$ میشود) و ارتفاع مجهول h برابرمیشود با:

$$h=r\cdot tg\ \alpha=\frac{r}{\sqrt{۲}}\approx ۰/۷r$$

برای اینکه حداکثر روشنائی به یخ برسد بایستی فانوس را تا ارتفاع r ۰/۷ بالا ببریم .

حالا فرض کنیم که امکانات موجود اجازه ندهد فانوس را از ارتفاعی مانند H بالاتر ببریم . در اینصورت زوایه α نمیتواند از صفرتا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند. بلکه در حدودتنگ‌تری تغییرمی‌نماید: $۰<\alpha<arc\ tg\frac{H}{r}$. مثلا فرض کنید که $r=۱۲$ متر و $H=۹$ متر باشد . در اینحالت میتوان فانوس را واقعاً در ارتفاع $h=\frac{r}{\sqrt{۲}}$ مستقر کرد ، زیرا این مقدار کمی بیش از ۸متر است که درحدود امکانات ماست . اما اگر H کوچکتر از ۸ مترباشد (مثلا وقتی که بخواهیم برای استقرار فانوس از تیری بطول ۶ متراستفاده کنیم) . دراین صورت مشتق تابع $T(\alpha)$ درفاصله $[۰\ \text{و}\ arctg\frac{H}{r}]$ مساوی صفرنمیشود. دراینحالت مقدارحداکثردر کرانه

این فاصله بدست می‌آید و فانوس را باید تا حداکثر ارتفاع ممکنه یعنی $\frac{\text{متر}}{6}$ = H بالا برد .

تا اینجا تابع را در فاصله محدود در نظر گرفتیم . اگر فاصله بی‌نهایت باشد ، حتی درمواردی هم که تابع اتصالی است ممکن است دارای مقدار حداکثر و یاحداقل نباشد و فی‌المثل بامیل x بسمت بی‌نهایت ، تابع همیشه صعودی و یا نزولی باشد . مثلا توابع $y = kx + b$ (ش۵صفحه۱۲۱)، $y = \text{arc tg } x$ (ش۱۶ — a) ، $y = \ln x$ (ش ۱۶ — b) هرگزماکزیمم یا می‌نیممی نخواهندداشت . تابع $y = e^{-x^2}$ (ش ۱۶ — c) درنقطه $x = 0$ دارای ماکزیمم است ولی هیچوقت می‌نیمم نمیشود . و بالاخره تابع $y = \frac{x}{1 + x^2}$ (ش۱۶ — d) درنقطه $x = -1$ می‌نیمم و درنقطه $x = 1$ ماکزیمم است .

در حالتی که فاصله بی‌نهایت باشد ، جستجوی حداکثر وحداقل ازهمان قاعده معمولی بدست می‌آید ، فقط بجای $f(a)$ و $f(b)$ بایستی حدود زیررا در نظر گرفت :

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x) \quad , \quad B = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

مشتقات از مرتبه بالاتر. برای اینکه منحنی نمایش تغییرات تابع را مفصل‌تر بررسی کنیم بایستی جریان تغییر $f'(x)$ یعنی مشتق تابع $f(x)$ را (که‌مورد بررسی است) ، مطالعه کنیم . $f'(x)$ بنوبه خود تابعی است از x و از آن میتوان مشتق گرفت .

مشتق مشتق را مشتق دوم نامیده و چنین می‌نویسند :

$$[y']' = y'' \quad \text{یا} \quad [f'(x)]' = f''(x) .$$

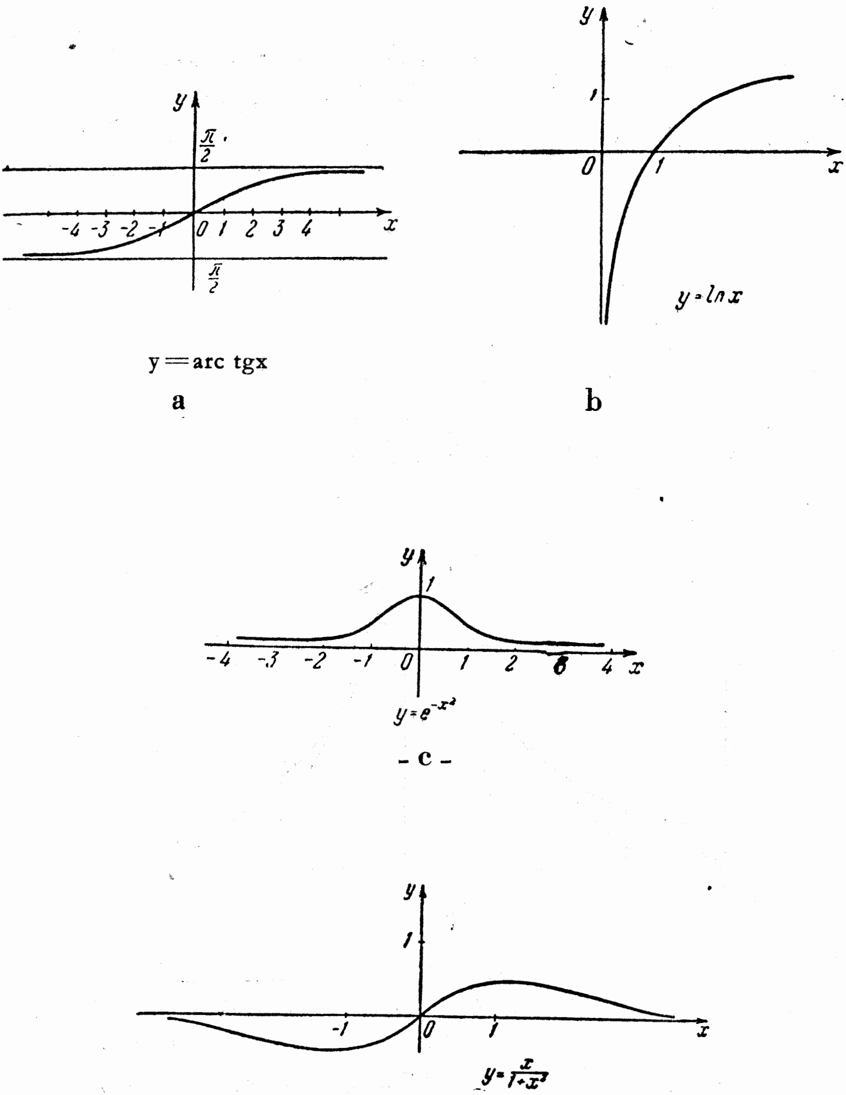
بهمین ترتیب میتوان مشتق سوم را هم حساب کرد .

$$[y'']' = y''' \quad \text{یا} \quad [f''(x)]' = f'''(x) .$$

وغیره . بطورکلی مشتق n ام ویا باصطلاح مشتق مرتبه nام چنین است :

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) .$$

البته بایستی درنظرداشت که این رشته میتواند برای مقداری از x (و یا حتی همه مقادیر x) در مرتبه‌ای از مشتق مانند مرتبه k قطع شود : ممکن است که $f^{(k)}(x)$ وجود داشته باشد ،ولی مشتق $f^{(k+1)}(x)$ دیگروجودنداشته‌باشد. مشتقات مرتبه های بالاتر را کمی بعد درقسمت ۹ ضمن مطالعه فرمول تیلوربکار خواهیم برد و


y
$\frac{\pi}{2}$
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 x
$\frac{\pi}{2}$
y = arc tgx
a
y
1
0 1 x
y = ln x
b
y
1
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 x
$y = e^{-x^2}$
- c -
y
1
-1 0 1 x
$y = \frac{x}{1+x^2}$
d

ش ۱۶

در اینجا روی مشتق دوم مکث می کنیم .

مفهوم مشتق دوم . تحدب و تقعر. مشتق دوم یك مفهوم ساده مکانیکی دارد . فرض کنید $S = f(t)$ قانون حرکت مستقیم‌الخط نقطه‌ای باشد . آنوقت S' سرعت و S'' «سرعت تغییرساعت» ویا ساده‌تر شتاب نقطه درلحظه زمانی t میشود. مثلا درمورد سقوط آزاد جسم :

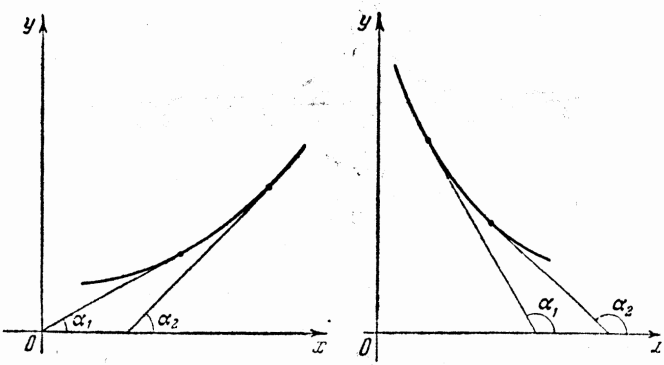
$$S = \frac{g \cdot t^2}{2} + v_0 t + S_0$$

$$S' = g \cdot t + v_0$$

$$S'' = g$$

یعنی شتاب جسمی که درحال سقوط آزاداست مقداری‌است ثابت .

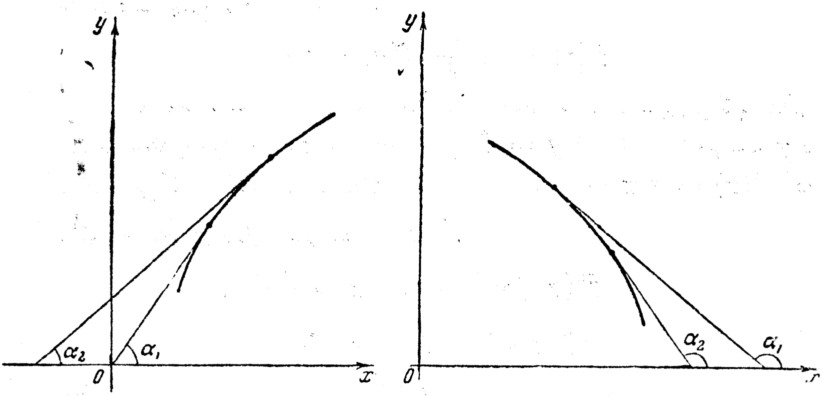
همچنین مشتق دوم معنای ساده هندسی دارد : همانطور که ازقانون مشتق‌اول میتوان صعودی یا نزولی بودن تابع را معین کرد ، همانطورهم از روی قانون مشتق دوم میتوان دانست که منحنی نمایش تابع درچه‌جهتی دارای‌انحنا است .



ش ۱۷

وقتی که مشتق دوم درفاصله‌ای همیشه مثبت باشد باین معنی است که مشتق اول در این فاصله صعودی است وبنابراین $f'(x) = tg\ \alpha$ صعودی است و از آنجا خود زاویه α یعنی تمایل مماس بر منحنی (ش ۱۷) هم صعودی است . در این ضمن بهمین ترتیب که‌درطول‌منحنی جلومیرویم و ازنقاط‌متوالی عبورمی کنیم ، منحنی‌همیشه در یکجهت خم میشود و باصطلاح « انحناء بسمت پائین» پیدا می کند .

برعکس درفاصله‌ای که‌مشتق دوم‌همیشه‌منفی‌است(ش۱۸)منحنی نمایش‌تغییرات



ش۱۸

تابع با «انحناء بسمت بالا» پیش میرود [۱]

علائم ماکزیمم و می‌نیمم. جستجوی منحنی نمایش تغییرات تابع. اگر تحدب منحنی درطول تمام پاره‌خط‌مفروض تغییرات x، بسمت‌بالا باشد ودر نقطه‌ای مانند x_0 از این پاره خط مشتقی مساوی صفرداشته باشد، در این نقطه الزاماً ماکزیمم خواهد داشت و در حالتی که تحدب بطرف پائین باشد، دارای‌می‌نیمم خواهد بود. این ملاحظه ساده غالباً اجازه میدهد کشف کنیم، نقطه‌ای را که درآن مشتق مساوی صفراست ماکزیمم موضعی است یا می‌نیمم موضعی [۲]؟

مثال۱ ــ به بینیم منحنی نمایش‌تغییرات تابع زیررا چگونه نمایش می‌دهند:

$$f(x) = \frac{x^۳}{۳} - \frac{۵x^۲}{۲} + ۶x - ۲$$

مشتق اول آنرا گرفته ومساوی صفر قرارمی‌دهیم:

$$f'(x) = x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$$

ریشه های معادله بدست آمده $x_۱ = ۲$ و $x_۲ = ۳$ خواهد بود. مقادیر

۱ــ اگر دقیق‌تر تعریف کنیم: «انحناء بسمت‌بالا» خاصیتی ازمنحنی است که اگردو نقطه دلخواه آنرا بهم وصل کنیم، منحنی دربالای این‌وترقرار گیرد(یادقیق‌تر در پائین آن نباشد) بهمین ترتیب برای «انحناء بسمت‌پائین»ویا بطورخلاصه«تقعر»، منحنی از بالای وترهایش عبور نمی کند.

۲ــ در حالات بغرنج‌تر، وقتی که مشتق دوم هم خودش تغییرعلامت می‌دهد، مسئله روشن‌کردن خصوصیت نقاط ساکن باکمك فرمولهای تیلور حل میشود(بقسمت ۹ مراجعه شود).

متناظر تابع چنین میشود :

$$f(۲) = ۲\frac{۲}{۳} \quad \text{و} \quad f(۳) = ۲\frac{۱}{۲}$$

دو نقطه بدست آمده را روی دستگاه محورهای مختصات معین می کنیم ، بآنها میتوان نقطه با طول $x = ۰$ و $y = f(۰) = -۲$ که درآنجا منحنی محور y ها را قطع می کند ، اضافه کرد . مشتق دوم برابر است با $f''(x) = ۲x - ۵$ که بازاءِ $x = \frac{۵}{۲}$ مساوی صفرمیشود . ضمناً

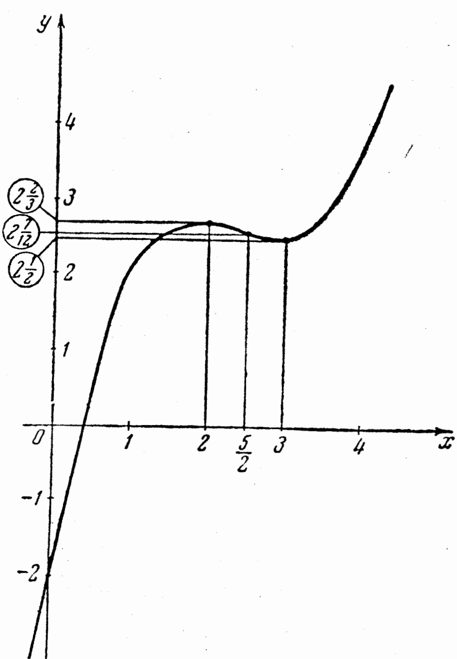
$$f''(x) > ۰ \quad \text{برای} \quad x > \frac{۵}{۲}$$

$$f''(x) < ۰ \quad \text{برای} \quad x < \frac{۵}{۲}$$

نقطه : $x = \frac{۵}{۲}$ و $y = f\left(\frac{۵}{۲}\right) = ۲\frac{۷}{۱۲}$

نقطه عطف منحنی است . در سمت چپ آن تحدب منحنی بطرف بالاو در سمت راست آن تحدب منحنی بطرف پائین است .

اکنون دیگرواضح است که نقطه $x = ۲$ نقطه ماکزیمم و نقطه $x = ۳$ نقطه می‌نیمم تابع است .

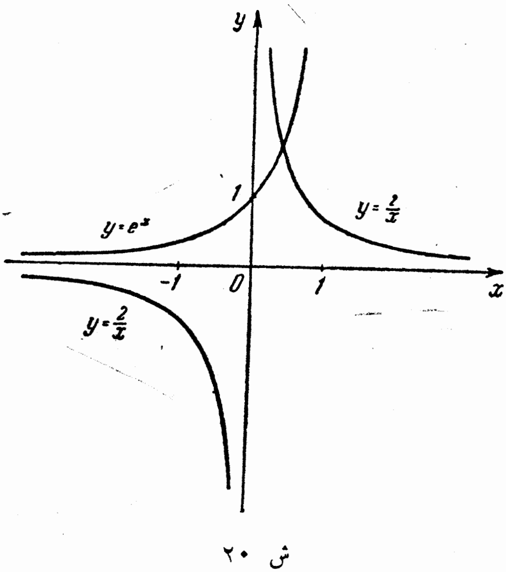


بر اساس آنچه که بدست آوردیم نتیجه می گیریم که منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ بصورتی که در شکل ۱۹ نشان داده‌ایم درمیآید . منحنی ازنقطه $(۰ و -۲)$ عبورمیکند ، در حالیکه تحدب آن بطرف بالا است ودرنقطه $(۲ و ۲\frac{۲}{۳})$ ماکزیمم خود را بدست می‌آورد و سپس بطرف پائین فرود میآید. درنقطه $(۲\frac{۷}{۱۲} و ۲\frac{۱}{۲})$ که در آن $f''(x) = ۰$ است تحدب به‌تقعر تبدیل میشود.

بعداً در نقطه $\left(2\frac{1}{2} , 3\right)$ می‌نیمم منحنی بدست‌میآید و سپس با نمو x منحنی تا بی‌نهایت نمومی کند. حکم اخیرناشی ازآنست که جمله‌اول‌تابع ، که شامل‌بزرگترین درجه x (درجه سوم) است، سریع‌تر ازجملات دوم وسوم‌بسمت بی‌نهایت میل‌می‌کند. بهمین ترتیب وقتی که به x مقدار منفی داده و قدرمطلق آنرا نمودهیم منحنی‌نمایش تغییرات تابع بسمت $-\infty$ میل می‌کند.

مثال ۲ـ ثابت می‌کنیم که‌نامساوی $e^x \geqslant 1 + x$ برای هرمقداردلخواهی از x صادق است . برای اثبات این مطلب تابع $f(x) = e^x - x - 1$ را در نظرمی‌گیریم . مشتق اول آن $f'(x) = e^x - 1$است و فقط بازاءِ $x = 0$ مساوی صفرمیشود . مشتق ثانی‌آن $f''(x) = e^x$ بازاءِ تمام مقادیرxمثبت است . بنابراین تحدب منحنی نمایش‌تغییرات تابع$f(x)$ بطرف پائین است. عدد $f(0) = 0$ می‌نیمم تابع است وبنابراین $e^x - x - 1 \geqslant 0$ (بازاء تمام مقادیر x) .

منحنی نمایش تغییرات توابع را برای منظورهای مختلف میتوان‌بکاربرد ·مثلا



ش ۲۰

بکمك آنها غالباً میتوان ریشه های حقیقی این ویا آن معادله را بدست آورد . مثلا برای اثبات اینکه معادله :

$$x \cdot e^x = 2$$

تنها یك ریشه حقیقی دارد ، میتوان منحنی نمایش تغییرات توابع $y = e^x$ و $y = \frac{۲}{x}$ را پیدا کرد (این دو منحنی در شکل ۲۰ رسم شده است). بسادگی دیده میشود که منحنی‌های این توابع تنها دریك نقطه یکدیگررا قطع میکنند و در نتیجه ، معادله $\frac{۲}{x} = e^x$ تنها یك ریشه دارد .

روش آنالیز بطور وسیع برای محاسبه تقریبی ریشه های معادلات بکار میرود . دراین خصوص بفصل چهارم قسمت ٥ مراجعه کنید .

۸

نمو و دیفرانسیل تابع

دیفرانسیل تابع. تابع $y=f(x)$ که دارای مشتق است در نظر می گیریم. نمو این تابع :

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

که متناظر با نمو آرگومان Δx میباشد، دارای این خاصیت است که نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بسمت حدی میل می کند که مساوی با مشتق است :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x).$$

همین رابطه‌را میتوان چنین نوشت :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

که در آن α مقداری است وابسته به Δx و ضمناً وقتی که $\Delta x \to 0$، α هم‌بسمت صفرمیل میکند. از آنجا نموتابع بصورت زیردرمیآید :

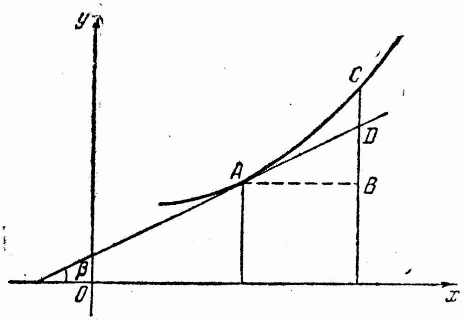
$$\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x + \alpha \,.\, \Delta x$$

که در آن $\alpha \to 0$ وقتی که $\Delta x \to 0$.

جمله اول سمت راست این تساوی بطور کاملا ساده‌ای به Δx مربـوط است و مخصوصاً متناسب با Δx است. آنرا **دیفرانسیل** تابع برای مقدارمفروض x مینامند که متناظربا نموآرگومان Δx بوده و بصورت زیرنشان داده میشود :

$$dy = f'(x) \,.\, \Delta x$$

وجه امتیاز جمله دوم اینست که وقتی $\Delta x \to 0$ بعلت اینکه در α ضرب‌شده است سریع‌تر بسمت صفر میل می کند، میگویند که جمله دوم نسبت به Δx (و همچنین در حالتی که $f'(x) \neq 0$ باشد نسبت به جمله اول) بی‌نهایت کوچکی از مرتبه بالاتر است . باین ترتیب میتوان گفت که برای مقادیر Δx که باندازه کافی کوچك باشند، نه فقط خود جمله دوم ، بلکه نسبت آن به Δx هم باندازه دلخواه کوچك میشود .



ش ۲۱

تجزیه Δy را به دوجمله ، که اولین جمله آن (ودرحقیقت جزء مهم آن) بطور خطی وابسته به x است وجمله دوم که برای مقادیر کوچك Δx جزئی و بی‌اهمیت است ، میتوان در شکل ۲۱ ملاحظه کرد . پاره خط $BC = \Delta y$ است و ضمناً $BC = BD + DC$ که درآن $BD = \operatorname{tg}\beta \,.\, \Delta x = f'(x)\,\Delta x = dy$ و DC بی‌نهایت کوچکی است که نسبت آن به Δx ازمرتبه بالا تری است .

درعمل از دیفرانسیل برای تصور تقریبی نمو تابع استفاده میشود . مثلا فرض کنید که لازم باشد حجم جداری که یك قوطی مکعب شکل را پوشانده است معین کنیم. ابعاد داخلی این قوطی مساوی $10 \times 10 \times 10$ سانتیمتر وضخامت جدار ۰/۰۵ سانتیمتر است . اگر دقت خاصی لازم نباشد میتوان چنین استدلال کرد . حجم تمام جدار قوطی عبارتست از نمو Δy تابع $y = x^3$ بازاء $x = 10$ وقتی که $\Delta x = 0/1$ باشد . بطور تقریبی چنین خواهیم داشت :

$$\Delta y \# dy = (x^3)'.\Delta x = 3x^2.\Delta x = 3 \times 10^2 \times 0/1 = 30$$ سانتیمتر مکعب

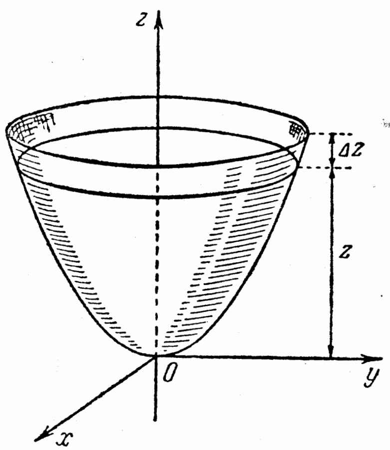
بمنظور تقارن ، نمو Δx متغیر مستقل را هم بعلامت dx نشان می‌دهیم و آنرا دیفرانسیل x مینامیم . باین ترتیب علامت دیفرانسیل تابع باین ترتیب نوشته میشود:

$$dy = f'(x).dx\,.$$

از آنجا مشتق عبارتست از نسبت دیفرانسیل تابع به دیفرانسیل متغیرمستقل :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

دیفرانسیل تابع از نظرتاریخی ازمفهوم«غیرقابل تقسیمها» ریشه می گیرد. این مفهوم که ازنظرریاضی‌دان امروزی معنا ومفهوم روشنی‌ندارد درزمان خود یعنی درقرن هفدهم اساس آنالیز ریاضی بشمار میرفت . در تصور این مفهوم در جریان چند قرن تغییرات اساسی داده شد . «غیرقابل تقسیم» و سپس «دیفرانسیل» تابع را بعنوان‌مقدار بی‌نهایت کوچك موجودی درنظرمی گرفتند که با مقدار ثابت خیلی کوچکی که درعین حال مساوی صفرنیست ، شباهت داشت . کمی قبل تعریف‌دیفرانسیل ، همانطور که در آنالیزمعاصرفهمیده میشود، داده شد . طبق‌این تعریف ، دیفرانسیل عبارتست ازمقدار معینی که بازاء هرنموآرگومان Δx بدست میآید و ضمناً متناسب با آن هم هست . خاصیت اساسی دیفرانسیل(که‌مبین وجه امتیازآن با Δy است) فقط درپرتو حرکت وتغییرذیده میشود . اگرنموΔxرا که بسمت صفرمیل می کند (یعنی بی‌نهایت کوچك میشود) مطالعه کنیم ، تفاوت بین dy و Δy حتی نسبت به Δxباندازه دلخواه کوچك میشود .



ش ۲۲

در همین تبدیل نموهای کوچك به دیفرانسیل‌ها،اساس‌وریشه اغلب‌کاربردهای آنالیر بی‌نهایت کوچکها در مورد بررسی پدیده های طبیعی قرار دارد . خواننده بخصوص‌این‌مطلب را باروشنی‌تمام در مورد معادلات دیفرانسیل که در این کتاب در فصول پنجم و ششم شرح داده شده است ، خواهد دید .

برای‌شناختن‌تابعی که جریان مفروضی رابیان می کند کوشش می کنند معادله‌ای که این‌تابع‌را بامشتقات مرتبه‌های‌مختلف آن ، بشکل معینی مربوط میکند بدست آورند ، روش بدست‌آوردن اینگونه‌معادلات که روش دیفرانسیلی نامیده میشود ، اغلب باینجا منجر میشود که بجای نموتابع مورد جستجودیفرانسیلهای متناظرآنها را قراردهیم .

بعنوان مثال مسئله زیررا حل می کنیم : درفضائی که بوسیله دستگاه مختصات قائم $oxyz$ مشخص شده است سطحی را که از دوران سهمی بمعادله $z = y^{2}$ (در صفحه oyz)بدست آمده‌است‌مطالعه‌می کنیم . این‌سطح پارابولوئیددوارParaboloïde نامیده میشود (شکل ۲۲)فرض کنیدvحجم‌جسمی که محدود به پارابولوئیدوصفحه‌ای که بفاصله z موازی باصفحه oxy رسم شده است ، باشد . واضح است که v تابعی است از z $(z > 0)$.

برای اینکه بدانیم تابع مساوی با چیست ،کوشش می کنیم که دیفرانسیل‌آن dv راپیداکنیم . نموΔvتابع vدرنقطه z مساوی باحجمی‌است که بوسیله پارابولوئید ودوصفحه موازی oxy که درفواصل z و $z + \Delta z$ ازآن قرارگرفته است ، محدود باشد .

بسادگی دیده میشود که مقدارΔv بزرگتر از حجم استوانه دوار بشعاع $\sqrt{z}$ و ارتفاع Δz و کوچکتر ازحجم استوانه دواربشعاع $\sqrt{z + \Delta z}$ و ارتفاع Δz است . بنابراین :

$$\pi . z . \Delta z < \Delta v < \pi . (z + \Delta z) . \Delta z$$

وبنابراین :

$$\Delta v = \pi(z + \theta . \Delta z) . \Delta z = \pi . z . \Delta z + \pi . \theta \cdot \Delta z^{2}$$

که درآن θ عددی است که به Δz مربوط‌بوده و در نامساوی $0 < \theta < 1$ صدق می کند .

بنابراین موفق شدیم که نمو Δv را بصورت مجموعی بنویسیم که جمله اول آن متناسب با Δz و جمله دوم آن بی‌نهایت کوچکی است که نسبت به Δz از مرتبه بالاتراست (وقتی که $\Delta z \longrightarrow 0$) ، از اینجا نتیجه‌میشود که جمله اول ، دیفرانسیل تابعvاست:

$$dv = \pi . z . \Delta z$$

یا :

$$dv = \pi . z . dz$$

زیرا برای متغیرمستقل z تساوی $\Delta z = dz$صادق است .

تساوی بدست‌آمده رابطه بین‌دیفرانسیلهای dv و dz (ازمتغیرهای v و z) را معین می کند وبهمین علت معادله دیفرانسیل نامیده میشود .

میدانیم که:

$$\frac{dv}{dz} = v'$$

که درآن v' مشتق v نسبت به متغیر z است . بنا براین معادله دیفرانسیلی بالا را میتوان بصورت زیرنوشت :

$$v' = \pi . z$$

حل این معادله ساده دیفرانسیلی منجربه پیدا کردن تابعی از z میشود که مشتق آن مساوی با $\pi.z$ است . مسائلی از این قبیل را بطورکلی در قسمتهای ۱۰ و ۱۱ همین فصل روشن خواهیم کرد . حالا با اتکاءِ باعتماد خواننده میگوئیم که با حل این مسئله تابع $v = \frac{\pi . z^2}{2} + c$ را بدست خواهیم آورد که در آن بجای c میتوان هرعدد ثابت دلخواه درنظر گرفت [1] درحالت مفروض تابع ، واضح است که حجم جسم موردنظر بازاءِ $z = 0$ مساوی صفراست (شکل ۲۲ را بهبینید) و ازآنجا $c = 0$ میشود .

بنابراین تابـع بوسیله $v = \frac{\pi . z^2}{2}$ معین میشود .

قضیه میانه و نمونه هائی از مورد مصرف آن . دیفـرانسیل ، مقدار تقریبی نموتابع‌را بازاء نمومتغیرمستقل ومشتق را در نقطه شروع میدهد . اگر صحبت برسرنمو درفاصله از $x = a$ تا $x = b$ باشد ، دراینصورت :

$$f(b) - f(a) \neq f'(a)(b-a)$$

تساوی دقیق را دراین باره زمانی میتوان بدست آورد که مشتق $f'(a)$ در نقطه شروع را با مشتق نقطه میانه‌ای که بطورمناسب ودرفاصله (a و b) انتخاب شده باشد ،عوض کرد . مطلب را دقیق‌ترمیتوان چنین بیان کرد : **اگر $y = f(x)$ تابعی باشد که درفاصله $a \leqslant x \leqslant b$ قابل دیفرانسیل گیری باشد ، در داخل این فاصله نقطه‌ای مانند ξ وجود دارد که در رابطه‌زیـر صدق میکند :**

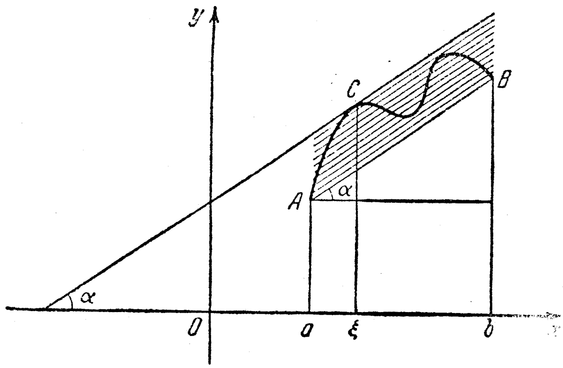
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \qquad (22)$$

مفهوم هندسی «قضیه میانه» که تحت عنوان دستور لاگرانژ یا دستور نموهای محدود Formule des accroissements finis مشهورشده‌است ، فوق‌العاده‌ساده‌است . فرض

---

[1] ـ و باین ترتیب مسئله کاملا حل شده‌است (اولین‌زیرنویس‌بخش‌انتگرال را ببینید)

کنید روی منحنی نمایش تغییرات تابع $f(x)$ ، نقاط A و B متناظر با مقادیر $x = a$ و $x = b$ باشد ، این دو نقطه را بوسیله وتر AB وصل می کنیم (شکل ۲۳) ، خط AB را بموازات خود بطرف بالا یا پائین حرکت می‌دهیم ، در



ش ۲۳

لحظه‌ای که خط ما برای آخرین بارمنحنی را قطع کند ، در نقطه‌ای مانند c برآن مماس خواهد بود . در این نقطه (که طول آنرا $x = \xi$ فرض می کنیم) مماس دارای همان زاویه تمایل α است که وتر AB داشت . اما درمورد وتر داریم :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ازطرف دیگر درنقطه c داریم :

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(\xi).$$

و تساوی :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

هم درست همان قضیه میانه را بیان می کند [1]

دستور(۲۲)دارای این خصوصیت است که معرف نقطه مجهول ξ است ، نقطه‌ای که درباره آن فقط اینرا میدانیم که «جائی در فاصله (a و b)» قرار گرفته است ولی با وجود این اشکال (نامعین بودن ξ)، این دستور دارای اهمیت تئوریك زیادی است و

۱ ـ البته ملاحظات مذکورتنها مفهوم هندسی قضیه را نشان می‌دهد و آن را نمیتوان بعنوان اثبات دقیق قضیه تلقی کرد .

بوسیله آن بسیاری از قضایای آنالیزاثبات میشود . اهمیت عملی ومستقیم این دستور هم زیاد است ، زیرا امکان می‌دهد تا نموتابع را در حالتی که حدود نوسان مشتق آن معلوم باشد ، تخمین بزنیم . مثلا :

$$|\sin b - \sin a| = |\cos \xi|(b-a) \leqslant b-a$$

در اینجا a و b و ξ زوایائی هستند که برحسب رادیان داده شده اند ؛ ξ مقداری است بین a و b . مقدار ξ معلوم‌نیست ولی‌میدانیم که $|\cos \xi| \leqslant ۱$

از دستور (۲۲) روشن میشود ، تابعی که مشتق آن همیشه مساوی صفـر است بایستی مقدار ثابتی باشد ، چنین تابعی در هیچ فاصله نمیتواند نموی مخالف صفـر بدست آورد . خواننده میتواند بطریق مشابه وبسادگی ثابت کند ، تابعی که مشتق‌آن همیشه مثبت‌باشداجباراً صعودی است و برای‌موقعی که مشتق‌منفی‌باشد، نزولی است .

به یکی از تعمیم‌های قضیه میانه بدون اثبات اشاره میکنیم :

برای توابع $\varphi(x)$ و $\Psi(x)$ که در $[a, b]$ قابل‌دیفرانسیل‌گیری باشد (فقط اگر $\Psi'(x)$ در (a, b) مخالف صفر باشد) تساوی‌زیر صادق است:[1]

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\Psi(b)-\Psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\Psi'(\xi)} \qquad (۲۳)$$

که در آن ξ نقطه‌ای واقع درفاصله (a, b) می‌باشد[2]

از حکم مذکور میتوان وسیله‌کلی محاسبه حدودی بشکل :

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} \qquad (۲٤)$$

وقتی که در آن $\Psi(۰) = \varphi(۰) = ۰$ باشد ، بدست آورد . با استفاده از دستور (۲۳) متذکرمیشویم که :

$$\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(۰)}{\Psi(x)-\Psi(۰)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\Psi'(\xi)}$$

---

۱ ـ فرمول (۲۳) را میتوان با بکار بردن ساده قضیه میانه درتوابع بدست آورد :

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\Psi(b)-\Psi(a)}\Psi(x)$$

۲ـ علامتهای $[a, b]$ و (a, b) را متناظراً برای مقادیری‌از x که دررابطه $a \leqslant x \leqslant b$ و $a < x < b$ صدق کند، بکارمیبریم .

که در آن ξ بین ۰ و x واقع بوده وبنابراین همراه x ، مقدار ξ هم بسمت صفرمیل می کند ، این مطلب اجازه میدهد که بجای حد (۲٤) ، $\underset{x \to 0}{\text{حد}} \dfrac{\varphi'(x)}{\Psi'(x)}$ را حساب کرد که در اغلب موارد محاسبه‌حد را تسهیل میکند[1].

مثال . حد $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$ را وقتی کــه x بسمت صفر میل کند پیدا کنید .

اگرقاعده مذکور را سه مرتبه بکاربریم خواهیم داشت :

$$\underset{x \to 0}{\text{حد}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \underset{x \to 0}{\text{حد}} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \underset{x \to 0}{\text{حد}} \frac{\sin x}{6x} = \underset{x \to 0}{\text{حد}} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

۱ـ همین قاعده درمورد جستجوی حد کسرهائی‌هم که‌صورت و مخرج آنها باهم بسمت بی‌نهایت میل می کند صادق است . این روش که برای پیدا کردن اینگونه‌حدود (و یا باصطلاح برای رفع ابهام) بسیار مفید است مثلا درقسمت ۳ فصل ۱۲ بکار خواهد رفت .

۹

دستور تیلور

تابع :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

که در آن a_k عدد ثابتی است ، چندجمله‌ای درجه n نامیده میشود. در حالت‌خاص، تابع $y = ax + b$ چند جمله‌ای درجه اول و $y = ax^2 + bx + c$ چند جمله‌ای درجه دوم است. چند جمله‌ایها را میتوان ساده‌ترین توابع دانست. برای محاسبه چنین‌توابعی ، وقتی که x معلوم باشد ، جمع وتفریق وضرب کفایت میکنند و حتی به تقسیم هم احتیاجی نیست . چند جمله‌ایها بازاء تمام مقادیر x اتصالی بوده و ازهرمرتبه‌ای که باشند، دارای مشتق‌اند. مشتق یك چندجمله‌ای ، بنوبه خود یك‌چند جمله‌ای است که یك درجه پائین‌تر ازخود چند جمله‌ای‌است ومشتق مرتبه $n+1$ام و بالاترازآن‌ازچندجمله‌ای درجه n ، مساوی با صفر است .

اگربه چند جمله‌ایها ، تابع بشکل :

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n}$$

را که برای محاسبه آن تقسیم هم لازم است و توابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x}$ و بالاخره توابعی که از ترکیب حسابی این توابع بدست‌میآید ، اضافه کنیم ؛ مجموعه توابعی رابدست میآوریم که باکمك روشهای دوره متوسطه‌قابل محاسبه‌اند .

روی همان نیمکت دبیرستان درباره یك سلسله توابع دیگر ازقبیل :

$$\sqrt[5]{x} \text{ و } \log x \text{ و } \sin x \text{ و } \text{arc tg } x \text{ و } \ldots\ldots$$

هم تصوراتی بدست آورده و خواص مهم آنها را یاد گرفته‌ایم، ولی ریاضیات مقدماتی جواب این سؤال راکه : چگونه این توابع را محاسبه می‌کنند ، نمیدهد. مثلا چه اعمالی روی x باید انجام داد تا $\log x$ یا $\sin x$ را بدست آوریم . جواب این سئوال‌را روشهائی که درآنالیزبوجود آمده‌است ، می‌دهد . درباره یکی ازروشها با تفصیل بیشتری صحبت می‌کنیم :

فرمول تیلور Formule de Taylor . فرض کنید که‌درفاصله‌ای، که‌نقطه a درداخل آن واقع است ، تابع $f(x)$ داده شده باشد ومشتقات آن ازهرمرتبه‌ای‌در دست باشد . چند جمله‌ای درجه اول :

$$p_1(x) = f(x) + f'(a)(x - a)$$

درنقطه $x = a$ بر $f(x)$ منطبق است وبسادگی میتوان تحقیق کرد که مشتق ایـن چند جمله‌ای درجه اول هم در این نقطه همان مشتق $f(x)$ است . منحنی نمایش تغییرات این تابع خط راستی است که درنقطه a برمنحنی $f(x)$ مماس است .

میتوان چند جمله‌ای درجه دومی مانند .

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

انتخاب کرد که درنقطه $x = a$ با $f(x)$ مقدار مشترکـی داشته و مشتقات اول و دومشان هم یکی باشد . منحنی این تابع درجه دوم در نزدیکی نقطه a به منحنی $f(x)$ چسبیده‌تر وبآن نزدیکتر خواهد بود . طبیعی است که باید انتظار داشته باشیم اگر چند جمله‌ای بسازیم که n مشتق‌اول آن بازاء $x = a$ با n مشتق اول $f(x)$ درهمین نقطه یکی باشد ، در اینصورت این چند جمله‌ای بازاء مقادیری از x که به a نزدیکند به $f(x)$ باندازه کافی نزدیك خواهد بود .

باین ترتیب تساوی تقریبی زیر که دستور تیلور را بیان می‌کند بدست میآید:

$$f(x) \# f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n . \qquad (25)$$

جزء سمت راست این‌فرمول چند جمله‌ای درجه n ام از $x - a$ میباشد برای هرمقدار x بشرطی که $f(a)$ و $f'(a)$ و..... و $f^{(n)}(a)$ معلوم باشد میتوان $f(x)$ راحساب کرد .

بسادگی میتوان ثابت کرد که برای تابعی که $n+۱$ مشتق آن در دست باشد، تفاوت طرف راست این فرمول از طرف چپ آن مقدار کوچکی است که سریع‌تر از $(x-a)^n$ بسمت‌صفر میل می کند . علاوه بر آن ، این تنها چند جمله‌ای ممکن از درجه nام است که اختلاف آن با $f(x)$ بازاء مقادیر نزدیك به a ، مقدار کوچکی است که وقتی $x \to a$ ، سریع‌تر از $(x-a)^n$ بسمت صفر میل می‌نماید . در حالتی که $f(x)$ یك چند جمله‌ای جبری درجه nام باشد تساوی تقریبی (۲۵)به یك تساوی واقعی تبدیل میشود .

بالاخره این مطلب هم فوق‌العاده مهم است که موفق شویم اندازه اختلاف جزء سمت راست فرمول (۲۵) را از $f(x)$ بشکل ساده‌ای بیان کنیم . برای اینکه تساوی (۲۵) دقیق شود بایستی بسمت راست آن جمله‌ای که «جمله باقیمانده» دستور نامیده میشود ، اضافه کرد :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+\frac{f^{(n+۱)}(\xi)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}. \qquad (۲۶)$$

جمله تکمیلی اخیر:[۱]

$$R_{n+۱}(x) = \frac{f^{(n+۱)}(\xi)}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱}$$

دارای این خصوصیت است که بایستی مشتق رانه درخود a ، بلکه درنقطه غیرمشخصی مانند ξ که بطریق خاصی (و در فاصله aوx) از قبل انتخاب شده حساب کرد .

اثبات تساوی (۲۶) باندازه‌کافی‌مفصل است ولی درواقع مشکل‌نیست . یك‌نوع استدلال سطحی ولی کوتاه را دراینجا ذکرمی کنیم :

برای اینکه به‌بینیم در تساوی تقریبی (۲۵) طرف چپ با طرف راست چقدر اختلاف‌دارد، نسبت تفاضل‌طرف‌راست ازطرف‌چپ‌تساوی (۲۵)رابه $(x-a)^{n+۱}$ — مطالعه می کنیم :

۱ـ این فقط یکی از انواع ممکنه بیان جمله باقیمانده $R_{n+۱}(x)$است .

$$\frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots\ldots+\frac{\overset{(n)}{f}(a)}{n!}(x-a)^n]}{-(x-a)^{n+1}} \qquad (27)$$

خواننده را بمطالعه تابع زیرهم وادارمی کنیم :

$$\varphi(u) = f(u)+f'(u)(x-u)+\ldots\ldots+\frac{\overset{(n)}{f}(u)}{n!}(x-u)^n$$

که تابعی است ازمتغیر u و در آن x مقدار ثابتی بحساب آمده است . بدین ترتیب صورت کسر(۲۷) چیزی جزنمواین تابع ضمن انتقال از $a = u$ به $u=x$ نیست و مخرج آنهم نموتابع :

$$\Psi(u) = (x-u)^{n+1}$$

در همین فاصله خواهد بود . اکنون از تعمیم معروف قضیه میانه که درقسمت قبل ذکر کردیم استفاده کنیم :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\Psi(x)-\Psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\Psi'(\xi)}$$

با انجام دیفرانسیل گیری از توابع $\varphi(u)$ و $\Psi(u)$ نسبت به u (ضمناً بایدبخاطرداشت که x مقدار ثابتی است : یعنی ما آنرا ثابت فرض کردیم) چنین خواهیم داشت :

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\Psi'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

با مساوی قراردادن جمله اخیربا مقدار قبلی (۲۷) دستور تیلور بصورت (۲۶) بدست خواهد آمد .

دستور تیلور بصورت اخیرآن (۲۶) ، نه فقط وسیله ای برای محاسبه تقریبی $f(x)$ بدست میدهد ، بلکه اجازه می دهد که خطای حاصله را هم تخمین بزنیم .

مثال ساده ای بزنیم :

$$y = \sin x$$

مقدار تابع $\sin x$ و مشتقات متوالی آنرا بازاء $x = 0$ میدانیم .بااستفاده از این مطلب ، فرمول تیلور را برای $\sin x$ نوشته و فرض می کنیم که $a = 0$ و $n = 4$ باشد. در نتیجه خواهیم داشت :

$$f(x)=\sin x \qquad f'(x)=\cos x \qquad f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad \overset{IV}{f}(x) = \sin x \qquad \overset{V}{f}(x) = \cos x$$

$$f(۰) = ۰ \qquad f'(۰) = ۱ \qquad f''(۰) = ۰$$

$$f'''(۰) = -۱ \qquad \overset{IV}{f}(۰) = ۰ \qquad \overset{V}{f}(\xi) = \cos \xi$$

بنابراین :

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۶} + R_۵$$

که درآن :

$$R_۵ = \frac{x^۵}{۱۲۰} \cos \xi$$

اگرچه‌مقدار دقیق $R_۵$ برای‌ما معلوم نیست ولی بسادگی‌دیده‌میشود که $|\cos \xi| \leqslant ۱$ میباشد . اگر مقادیر x را از صفر تا $\frac{\pi}{۴}$ محدود کنیم ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$|R_۵| = \left|\frac{x^۵}{۱۲۰} \cos \xi\right| \leqslant \frac{۱}{۱۲۰}\left(\frac{\pi}{۴}\right)^۵ < \frac{۱}{۴۰۰}$$

بنابراین در فاصله $\left[۰ \text{ و } \frac{\pi}{۴}\right]$ میتوان تابع $\sin x$ را بادقت $\frac{۱}{۴۰۰}$ بصورت تساوی چند جمله‌ای درجه سوم زیرنوشت :

$$\sin x = x - \frac{۱}{۶} x^۳$$

اگر در تجزیه $\sin x$ طبق دستور تیلور جملات بیشتری بگیریم ، چند جمله‌ای از درجه بالاتر بدست خواهیم آورد که دقیق‌تر و به $\sin x$ نزدیك‌تر خواهد بود .

بطریق مشابهی جداول مثلثاتی و بسیاری جداول دیگر محاسبه میشود .

این یك قانون است که قوانین طبیعت ، با تقریب کافی بوسیلهٔ توابعی بیان میشود که میتوان‌ازآنها تا هرمرتبه‌ای که لازم‌باشددیفرانسیل گرفت . این دیفرانسیلها هم بنوبه خود میتوانند بوسیلهٔ چند جمله‌ایهای تقریبی بیان‌شوند : انتخاب درجه چند جمله‌ای مربوط باین است که تا چه اندازه دقت لازم داریم .

سری تیلور . اگر در دستور (۲۵) عده جملات را زیاد و زیادتر کنیم ، تفاوت قسمت سمت راست از $f(x)$ ، که بوسیله باقیمانده $R_{n+۱}(x)$ بیان میشود ،

ممکن‌است بسمت‌صفر میل کند . البته این‌مطلب برای‌هرمقدار x و هرتابع غیرمشخص ممکن نیست . ولی دسته بزرگی از توابع (بنام **توابع تحلیلی**) وجود دارد که در آنها لااقل برای مقادیری از x (در فاصله‌ای که شامل a هم‌هست) وقتی که $n \to \infty$ جمله باقیمانده $R_{n+1}(x)$ هم واقعاً بسمت صفر میل مینماید . بخصوص در مورد چنین توابعی میتوان باکمك دستور تیلور ، تابع $f(x)$را با دقت دلخواه‌محاسبه نمود. درباره این توابع بحث مفصل‌تری کنیم :

اگر وقتیکه $n \to \infty$ جمله $R_{n+1}(x)$ بسمت صفر میل نماید ، از رابطهٔ (۲۶) نتیجه میشود :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(a)+f'(a)(x-a)\ .\ .\ .\ .\ .+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n\right]$$

در این حالت میگویند که $f(x)$ بصـورت یك سری متقارب بینهـایت تجزیه میشود :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\ .\ .\ .\ .\ .$$

که بصورت قوای متوالی $x-a$ است و **سری تیلور** نامیده میشود . ضمناً $f(x)$ را مجموع این سری نامند . چندنمونه ازتوابع معروف را به سری تیلورتبدیل‌میکنیم (دربن امثله $a=0$ است)

(۱) $$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2\,!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}x^3+\ .\ .\ .\ .$$

(این رابطه برای مواقعیکه $|x|<1$ بوده و n عددی حقیقی باشد، صحیح‌است).

(۲) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\frac{x^7}{7\,!}+\ .\ .\ .\ .$$

(که برای هرمقدار x صادق است).

(۳) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4\,!}-\frac{x^6}{6\,!}+\ .\ .\ .\ .\ .$$

(که برای هرمقدار دلخواه x صادق است) .

(٤) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3!}+\ .\ .\ .\ .$$

(برای هر مقدار x صحیح است).

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۵} - \dots\dots \qquad (۵)$$

(این رابطه برای مقادیری از x که در نامساوی $|x| \leqslant ۱$ صدق کنند، صحیح است).

اولین مثال (که به بینم نیوتون مشهوراست) بوسیله نیوتون برای تمام مقادیر n تعمیم داده شد، ولی تا آنموقع تنها برای مقادیر صحیح n قبول شده بود. این مثال نمونه‌ای است که مورد استعمال دستور کلی تیلور را نشان میدهد. با کمك دونمونهٔ آخر بازاء $x = ۱$ میتوان مقادیر e و π را با دقت لازم محاسبه نمود.

اهمیت عملی دستور تیلور، که راههای محاسبه‌ای زیادی درمباحث آنالیز نشان داد، بسیار زیاد ست.

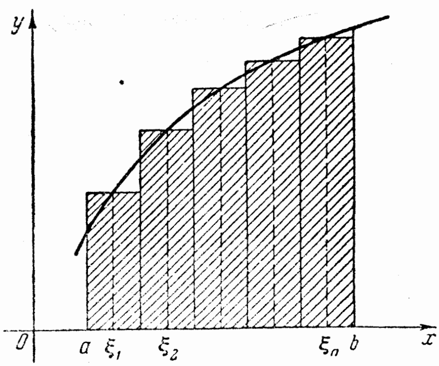
توابعی که بسری تیلور قابل تجزیه‌اند، میتوانند بسیاری ازقوانین طبیعی مانند قوانین فیزیکی، جریانهای شیمیائی وقوانین حرکت جسم وغیره را با دقت زیاد بیان کنند. اگر توابعی که بیان ریاضی این تئوریها را میدهد بعنوان توابعی با متغیر مختلط بررسی کنیم بحث روشن‌تر شده و تابع، دارای خواص کلی تر وکاملتری خواهد بود. تئوری این توابع درجای خود (فصل نهم) شرح داده خواهد شد.

فکر بیان تقریبی توابع بوسیلهٔ چندجمله‌ایها ومسئلهٔ تصور تابع بصورت بینهایت جمله ساده، تکامل زیادی در آنالیز پیدا کرد وبصورت رشته‌مستقلی ازآنالیزبنام تئوری تقریب توابع درآمد (فصل دوازدهم).

۱۰

انتگرال

در فصل اول وقسمت اول همین فصل دیدیم که ازنظر تاریخی ، مفهوم انتگرال وبطور کلی محاسبه انتگرالی از ضرورت حل مسائل معینی که نمونه ممتاز و مشخص آن مربوط به پیدا کردن سطح اشکال منحنی‌الخط است ، بوجودآمده است . اکنون میخواهیم این مسئله را روشن تر کرده و به بینیم کـه چه ارتباطی بین مسائل مربوط به‌محاسبات دیفرانسیلی‌و انتگرالی وجود دارد ، ارتباطی که بطور کامل تنهادرقرن‌هجدهم روشن شده بود.



ش ۲۴

سطح. فرض کنید منحنی که دربالای‌محور xهارسم شده‌است نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. کوشش میکنیم سطح S قطعه ای را که بین منحنی $y=f(x)$ ، محور x ها وخطوطی که از نقاط $x=a$ و $x=b$ بموازات محور y ها رسم شده ، محدود میباشد ، پیدا کنیم .

برای حل این مسئله بطریق زیر عمل میکنیم : پاره خط $[a$ و $b]$ را به n قسمت تقسیم میکنیم (لزومی ندارد که قسمتها برابر باشد) ، طول قطعه خط اول را Δx_1 وقطعه خط دوم را Δx_2 و ...... و قطعه خط آخررا Δx_n مینامیم . هر قطعه را بوسیلهٔ نقاط ξ_1 و ξ_2 و .... و ξ_n مشخص‌میکنیم وسپس مجموع زیر را تشکیل میدهیم :

$$S_n=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n \qquad (۲۸)$$

واضح است که S_n برابراست با مجموع سطوح مستطیلهائی که روی‌شکل ۲۴ حاشور زده شده است .

هرقدر که فاصله $[a$ و $b]$ را بقطعات کوچکتری تقسیم کنیم ، S_n بسطح S نزدیکتر خواهد شد . اگراین عمل را ادامه دهیم ، با تقسیم فاصله $[a$ و $b]$ بقطعات کوچکتر و کوچکتر ، مجموع S_n بسمت S میل خواهد کرد .

امکان تقسیم $[a$ و $b]$ بقطعات نامساوی ، مارا مجبور میکند تا آنچه را تحت عنوان : قطعاتیکه « مرتباً کوچك میشوند » می‌فهمیم ، دقیق کنیم . فرض کنیم که نه فقط n بطور نامحدود رشد کند ، بلکه بزرگترین طول Δx_i هم بسمت صفرمیل نماید . بنابراین :

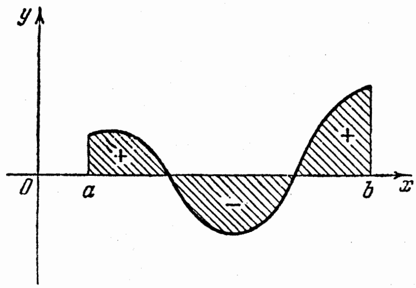
$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\left[f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\dots+f(\xi_n)\Delta x_n\right]=$$

$$=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \qquad (۲۹)$$

محاسبه سطح به جستجوی حد (۲۹) منجرشد .

متذکر میشویم وقتی که مسئله را طرح می کردیم تنها یك تصور تجربی‌درباره سطح شکل منحنی‌الخط داشتیم و تعیین دقیق آنرا نمیدانستیم . در نتیجه استدلال بالا تعریف دقیق مفهوم سطح‌را بدست آوریم که‌عبارتست از حد (۲۹) . حالا دیگر تنها یك تصور ظاهری و تجربی درباره سطح نداریم ، بلکه آنرا بصورت یك تعریف ریاضی منظم کرده‌ایم : تعریفی که اجازه میدهد سطح را محاسبه نمائیم (با توضیحی که در اواخر بخش‌حد صفحه۱۳۶ درباره‌طول‌محیط دایره‌وسرعت دادیم مقایسه کنید) .

ما در اینجا فرض کردیم که $f(x)\geqslant 0$ باشد . اگرعلامت $f(x)$ تغییر کند



۲۵

(مثل شکل ۲۵) ، حد (۲۹) مجموع جبری سطح قطعاتی را که بین منحنی $y = f(x)$ ومحور xها واقع است ، بدست میدهد. ضمناً سطح قطعاتی که بالای محور xها واقع است با علامت جمع و قطعاتی که زیرمحور xها واقع است با علامت تفریق حساب میشود .

انتگرال معین . وجود بسیاری مسائل دیگرهم ضرورت محاسبه حد (۲۹) را نشان میدهد . مثلا فرض کنید که نقطه ای با سرعت متغیر $v = f(t)$ روی خط راستی حرکت کند ، فاصله S را که نقطه مزبور در فاصله زمانی از $t = a$ تا $t = b$، طی میکند چگونه میتوان معین کرد ؟

فرض کنید تابع $f(t)$ اتصالی باشد یعنی در فاصلهٔ زمانی کوچك ، سرعت هم مقدار کوچکی تغییر کند. $[a ، b]$ را به n قسمت بطولهای $\Delta t_۱$ و $\Delta t_۲$ و ..... Δt_n تقسیم میکنیم . برای اینکه مسافت طی شده درهریك ازین فواصل Δt_i رابطور تقریب محاسبه کنیم، فرض میکنیم که سرعت هریك ازاین فواصل ثابت و مساوی با سرعت لحظهٔ دلخواهی ازآن مانند ξ_i باشد . باین ترتیب تمام مسافت طی شده بطور تقریب مساوی مجموع زیرخواهد بود :

$$S_n = \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

برای اینکه مسافت S راکه در فاصلهٔ زمانی از a تا b طی شده است دقیقاً حساب کنیم ، بایستی حد این مجموع را ، وقتی که فواصل تقسیم بسیار کوچك باشد، پیدا کرد واین همان حد بصورت (۲۹) است :

$$S = \underset{\max \Delta t_i \to ۰}{\text{حد}} \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

میتوان مسائل مشخص بسیاری را طرح کرد که حل آنها بمحاسبهٔ همین حد منجر شود . ما باز هم بمسائلی ازاین نوع برخورد خواهیم کرد ولی همین اندازه هم

که تا اینجا گفتیم باندازهٔ کافی اهمیت این حد را روشن میکند . حد (۲۹) را **انتگرال معین** تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a \text{ و } b]$ گویند و بصورت زیر نشان میدهند :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

جمله $f(x).dx$ را جمله زیر انتگرال و a و b را حدود انتگرال گیری ، a را حد پائین و b را حد بالا گویند .

ارتباط حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال . مثال ۲ قسمت ۱ همین فصل را میتوان بعنوان مثالی برای محاسبه مستقیم انتگرال معین انتخاب نمود. حالا میتوان گفت مسئله‌ای را که درآنجا ملاحظه کردیم به محاسبه انتگرال معین زیر منجر میشود :

$$\int_0^h ax \cdot dx$$

نمونه دیگری ازین قبیل را درقسمت ۲ این فصل ملاحظه کردیم که حل مسئله مربوط به پیدا کردن سطحی را که بوسیلهٔ سهمی $y = x^2$ محدود شده باشد مطرح کرده بود . در اینجا جواب این مسئله بمحاسبه زیرمنجرمیشود :

$$\int_0^1 x^2 dx$$

ما باین علت موفق شدیم این هردوحد را محاسبه کنیم که دستور ساده‌ای برای مجموع n عدد متوالی درسلسله اعداد طبیعی و مجموع مربعهای این اعداد میدانستیم. ولی برای هرتابع $f(x)$ موفق نخواهیم شد مجموع (۲۸) را بدست آوردیم یعنی این مجموع را بوسیله دستورهای ساده‌ای بیان کنیم [در (۲۸) نقاط ξ_i ونموهای Δx_i بوسیله قوانین مختلفی داده شده است] . از ین گذشته درحالاتی هم که بتوان جمع (۲۸) را انجام داد . یك راه حل و روش عمومی وجود ندارد . بلکه با کمك روشهای مختلفی که هر یك بصورت خاصی میباشد ، انجام میگیرد و مثل اینستکه برای هر مسئله‌ای راه حل جداگانه‌ای مخصوص بآن وجود دارد .

بنابراین‌مسئله پیدا کردن یك‌روش عمومی برای محاسبه انتگرال معین مطرح میشود . ازنظر تاریخی مدتهاست که این مسئله بشکل مسائل مشخصی از قبیل یافتن روش‌کلی‌برای‌محاسبه سطح اشکال‌منحنی‌الخط وحجم اجسامی که بوسیلهٔ سطوح منحنی

محدود شده‌اند وغیره درمقابل ریاضی دانان مطرح میباشد .

قبلا هم متذکر شدیم که ارشمیدس توانست علاوه برسطح قطعه دایره ، سطح قطعه بعضی اشکال دیگررا هم محاسبه نماید . بعدها مسائل مشابه دیگری مربوط به محاسبه سطح ، حجم ومرکز ثقل اجسام و غیره بتدریج حل شد و بمیراث ارشمیدس اضافه گردید . ولی جریان پیدا کردن روش کلی حل این مسائل ابتدا خیلی بکندی پیش میرفت ؛ درحقیقت وقتی این روش بوجود آمد که مصالح و مواد اولیه تئوریك و محاسبه‌ای (که بنوبهٔ خود در ارتباط کامل ونزدیك با احتیاجات مربوط بعمل ، بوجود آمده بود) باندازه کافی رویهم جمع شد. فقط در اواخر قرون وسطی بود که این سیر جمع آوری وتعمیم بطور جدی سرعت گرفت وبا انرژی زیادی تکامل پیدا کرد و این موقعی بود که بعلت تکامل شدید نیرو های تولیدی در اروپا ، روابط تولیدی قبلی (فئودالیسم) در هم می شکست و روابط تولیدی جدید (سرمایه داری) بوجود میآمد .

جمع آوری حالات مختلف مسائل مربوط بمحاسبهٔ انتگرالهای معین بموازات بررسیهائی بود که درمورد مسائل مربوط به پیدا کردن مشتق توابع انجام میگرفت . خواننده با مطالعهٔ قسمت اول این فصل میداند که کار این تدارك عظیم درقرن هفدهم و درآثار نیوتون و لایپ نیتز بپایان رسید . باین مفهوم میتوان نیوتون ولایپ نیتز را مکتشف وبوجودآورندهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال دانست .

یکی ازخدمات اساسی نیوتون و لایپ نیتز اینستکه در آثار خود بطور قطعی ارتباط عمیقی‌را که بین‌حساب دیفرانسیل وحساب انتگرال وجود دارد ، روشن کردند. بخصوص همین رابطه بود که روش عمومی محاسبه انتگرال های معین را برای دسته بزرگی ازتوابع بدست داد.

برای توضیح این رابطه بمثالی از مکانیك برگردیم :

فرض کنیم که یك نقطه مادی با سرعت ($v=f(t)$ روی خط راستی حرکت کند (t نمایندهٔ زمان است) . میدانیم که مسافت σ که نقطهٔ مفروض درفاصلهٔ زمانی $t=t_1$ و $t=t_2$ می‌پیماید ، مساوی با انتگرال معین زیراست :

$$\sigma=\int_{t_1}^{t_2} f(t).dt$$

علاوه بر آن فرض میکنیم که قانون حرکت نقطه یعنی تابع ($S=F(t)$ معلوم باشد ، این‌تابع‌رابطه بین زمان‌ومسافت S را بیان‌میکند ونسبت به مبداءِ A که روی خط مسیر انتخاب شده است ، بدست آمده است . واضح است که مسافت σ که در

فاصله زمانی $[t_1 \text{ و } t_2]$ پیموده شده است مساوی با تفاضل زیراست :

$$\sigma = F(t_2) - F(t_1)$$

بنابراین ازیك مفهوم فیزیکی بتساوی:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = F(t_2) - F(t_1)$$

میرسیم که رابطه بین قانون حرکت نقطه مادی وسرعت آنرا بیان میکند .

ازنقطه نظر ریاضی ، همانطورکه در قسمت ٥ این فصل دیدیم ، تابع $F(t)$ تابعی است که مشتق آن بازاء همه مقادیر مورد مطالعهٔ t مساوی $f(t)$ باشد یعنی :

$$F'(t) = f(t)$$

چنین تابعی را **تابع اولیه** $f(t)$ گویند .

باید درنظر داشت که اگرتابع $f(t)$ لااقل یك تابع اولیه داشته باشد ، دارای بینهایت تابع اولید خواهد بود ، زیر اگر $F(t)$ تابع اولیهٔ $f(t)$ باشد $F(t)+c$ هم تابع اولیه $f(t)$ خواهد بود که درآن c مقدار ثابتی است .

باری بدینوسیله جواب تمام توابع اولیه $f(t)$ را بدست میآوریم ، زیرا اگر $F_1(t)$ و $F_2(t)$ دو تابع اولیه $f(t)$ باشد، تفاضل آنها $\varphi(t) = F_1(t) - F_2(t)$ در فاصله تغییر t دارای مشتق $\varphi'(t)$ میباشد که مساوی صفر است وبنابراین مقدار ثابتی است[1].

از نقطه نظر فیزیکی مقادیر مختلف مقدار ثابت c متناظر با اختلاف نقطه مبداء o در قانون حرکت است (قانونیکه مسافت را معین میکند).

ازآنچه که گفته شد باین نتیجه میرسیم که اگر شرایط کلی برای تابع $f(x)$ در فاصله $[a \text{ و } b]$ داده شده باشد ، در حالتی از این شرایط که تابع $f(x)$ بتواند همچون سرعت حرکت نقطه ای در لحظه زمانی x مطالعه شود ، تساوی زیر صادق است[2] :

۱ــ طبق‌قضیه میانه:

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi'(v)(t - t_0) = 0$$

که درآن v بین t و t_0 واقعست وازآنجا $\varphi(t) = \varphi(t_0)$ برای تمام مقادیر t مقدار ثابتی‌است .

۲ــ میتوان بطریق ریاضی ، وبدون توسل بمثالی از مکانیك ، ثابت کرد که اگر تابع $f(x)$ در فاصله $(a \text{ و } b)$ اتصالی باشد (و حتی درحالیکه انفصالی ولی طبق دستور لوبگ Henri Lebesgue قابل جمع کردن باشد ــ فصل پانزدهم) ، تابع اولیه ای مانند $F(x)$ وجود دارد که درتساوی (۳۰) صدق کند .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (۳۰)$$

که درآن $F(x)$ یکی‌از توابع اولیه $f(x)$ است .

این تساوی **دستور** معروف **نیوتون و لایپ نیتز** ، هم هست که سئوال مربوط بمحاسبه انتگرال معین از تابع را بجستجوی تابع اولیه آن منجر میکند و بنابراین محاسبه دیفرانسیل وانتگرال را بهم مربوط میکند .

بسیاری از مسائل خاص و مشخصی که موضوع مطالعه بسیاری از ریاضی دانان بود ، بکمك این دستور خود بخود حل شد ، این دستور بیان میکند که انتگرال معین از تابع $f(x)$ در فاصله $[a ,b]$ مساوی است با تفاضل توابع اولیه این تابع بازاء مقادیر انتهای سمت راست و انتهای سمت چپ فاصله[۱] .

تفاضل (۳۰) باینطریق هم نوشته میشود :

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

مثال ۱. تساوی :

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

نشان میدهد که تابع $\frac{x^3}{3}$ تابع اولیه x^2 است . از آنجا بر اساس دستور نیوتون و لایپ نیز :

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{a^3}{3}$$

مثال ۲. c و c' را دوبارالکتریکی بفاصله r روی خط مستقیمی‌فرض میکنیم. نیروی متقابل F بین آنها در امتداد این خط بوده ومساوی است با :

$$F = \frac{a}{r^2}$$

$a = kcc'$) که درآن k مقدار ثابتی است) ، کار W این نیرو را ، وقتیکه بار c ثابت وبار c' درفاصله $[R_1 , R_2]$ تغییرمکان دهد ، میتوان حساب کرد (باتقسیم فاصله $[R_1 , R_2]$ بقطعات Δr_i) . نیرو را در هر یك ازین قطعات ثابت میگیریم

---

[۱] این دستور بصورتهای مختلفی تعمیم پیدا کرده‌است (مثلا درقسمت ۱۳ همین فصل‌دستوراستروگرادسکی Ostrogradsski را به‌بینید.)

وبنابراین مقدار کار درینگونه قطعات مساوی $\frac{a}{r_{۲}}\Delta r_i$ خواهد بود . اگر هر یك از قطعات تقسیم را بی نهایت کوچك بگیریم باین نتیجه میرسیم که کار W مساوی با انتگرال زیراست :

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{a}{r_i^{۲}}\Delta r_i=\int_{R_۱}^{R_۲}\frac{a}{r^{۲}}dr$$

این انتگرال را میتوانیم فوراً پیدا کنیم . با توجه باینکه :

$$\frac{a}{r^{۲}}=(-\frac{a}{r})'$$

خواهیم داشت :

$$W=-\frac{a}{r}\Big|_{R_۱}^{R_۲}=a\left(\frac{۱}{R_۱}-\frac{۱}{R_۲}\right)$$

بخصوص کاریکه نیروی F ضمن انتقال بار c' در فاصله‌ای که ابتدای آن $R_۱$ ازبار c تا بی‌نهایت انجام میشود مساویست با :

$$W=\lim_{R_۲\to\infty} a\left(\frac{۱}{R_۱}-\frac{۱}{R_۲}\right)=\frac{a}{R_۱}$$

از مفهومی که با کمك آن بدستور نیوتون ولایپ نیتز رسیدیم دیده میشود که این‌دستور ازنظرریاضی رابطهٔ عمیق و مشخصی را بیان میکند که در واقع امر و بطور عینی وجود دارد ، دستور نیوتون و لایپ نیتز نمونه عالی و در عین حال مهمی از این مطلب است که ریاضیات قوانین عینی را منعکس میکند .

بایستی‌خاطرنشان کرد که نیوتون‌دربررسیهای‌ریاضی‌خود بنقطه نظرهای‌فیزیکی متکی بود . کوششهای اوبخاطر ایجاد اصول حساب دیفرانسیل وانتگرال از کوششهائی که‌بخاطرایجاد اصول مکانیك میکرد جدا نبود .

خود مفاهیم آنالیز ریاضی مانند مشتق و انتگرال بتصور نیوتون و هم عصران او بطور کامل ازمتناظرهای فیزیکی و هندسی آنها (سرعت وسطح) « جدا نبود ». در حقیقت این مفاهیم دارای خصیصه ای بودند که نیمی ریاضی و نیمی فیزیکی بود .

مطلب برسر اینستکه تعاریفی که درآنزمان از این مفاهیم مورد قبول بود . از نقطه نظر ریاضی قانع کننده نبود و بنابراین کسی که این مفاهیم را بررسی میکرد و روی‌آنها عمل مینمود ، در حالات بغرنج لازم بود درهرقدمی که بر میدارد ازجنبه

عملی مسئله جدا نشود .

ازاین نقطه نظربین کارهای نیوتون ولایپ نیتز اختلافی وجود دارد[۱] . نیوتون درتمام مراحل بررسیهای خود نقطه نظرهای فیزیکی را راهنمای خود قرارداده بود ، درحالیکه مطالعات وبررسیهای لایپ نیتز یك چنین ارتباط مستقیم ونزدیکی با فیزیك نداشت و بعلت فقدان تعاریف دقیق ریاضی گاهی و در بعضی از مراحل مطالعاتش به نتیجه گیریهای اشتباه آمیزی رسید . از طرف دیگر ، از خصائص اساسی کار های لایپ نیتز میل بطرف تعمیم ، میل بطرف یافتن روشهای کلی‌تر برای حل مسائل آنالیز ریاضی بود .

مهمترین خدمت لایپ نیتز طرح و پیشنهاد علائم Symboles ریاضی است که منعکس کنندهٔ نوع عملی‌است که باید انجام گیرد . مثلا میتوان علائم اساسی آنالیز یعنی $\mathbf{dx}$ برای دیفرانسیل ، $\mathbf{d^2x}$ برای دیفرانسیل دوم ، $\int$ برای‌انتگرال و $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$ برای مشتق را ذکر کرد که همه بوسیله لایپ نیتز پیشنهادشده است . این واقعیت که تا امروزهم همین علامت ها را بکار میبرند گواه براینستکه تاچه اندازه مناسب انتخاب شده است .

این علامتها که خوب و بمورد انتخاب شده است بسرعت و سهولت محاسبه و استدلال ما کمك فراوان میکند . ازاین بالاتر ، این علامتها در بعضی موارد ، حتی جلو استنباطات غلط مارا هم میگیرد ، لایپ نیتز که اهمیت علامت را بخوبی‌احساس میکرد دراثر خود دقت زیادی درباره انتخاب آنها صرف کرده‌است .

البته مفاهیم آنالیز ریاضی (مشتق ، انتگرال وغیره) تکامل پیدا میکرد وپس از نیوتون ولایپ نیتز هم تا زمان ما همچنان راه تکاملی خود را طی میکند ؛ ولی شایان توجه است که دوره تعیین کننده تکامل آنالیزریاضی‌را اوایل قرن گذشته تشکیل میدهد وبیش ازهمه بکارهای کوشی مربوط است .

کوشی بطور دقیق و روشن مفهوم حد را تعریف کرد و بر اساس آن ، مفاهیم اتصال، مشتق، دیفرانسیل وانتگرال‌را هم تعریف‌نمود که ما آنها را بموقع‌خود درهمین فصل خواهیم آورد . از این تعاریف در آنالیز معاصر بطور وسیع استفاده میشود .

اهمیت این موفقیتها دراینستکه روشن میشود نه تنها درحساب وجبر وهندسه مقدماتی میتوان بشکل فرمولی عمل کرد ، بلکه در رشته جدید و کاملا وسیع

۱ـ کشفیات نیوتون ولایپ نیتز بدون ارتباط بایکدیگر انجام گرفت.

ریاضی یعنی آنالیز ریاضی هم میتوان بهمان نحو عمل نمود و نتایج درستی هم بدست آورد .

اکنون با توجه باینکه قسمت اساسی نتایج آنالیز ریاضی مورد استفادهٔ عملی پیدا کرده است میتوان گفت : اگر مفروضات اولیه ازنظر عمل وپراتیك‌صحیح است، بایستی نتایجی هم که باکمك استدلالهای ریاضی بدست میآید صحیح باشد . اگر ما معتقدیم که مفروضات اولیه باندازهٔ کافی دقیق است ؛ دراینصورت لزومی ندارد که درستی نتایجی که ازآنها بدست آمده‌است درعمل به ثبوت برسد ، بلکه تنها کافیست بدرستی استدلالهای خود معتقد باشیم .

واضح است برای آنچه که گفتیم بایستی‌شرایط زیررا درنظرداشت : مفروضات اولیه‌ای که ازعمل انتخاب شده ومورد استفاده قرارمی گیرد ازنقطه نظرقضاوت ریاضی با تقریب معینی دقیق است (یعنی دقت مطلق ندارد) . از اینجا باین نتیجه میرسیم که درهرمرحله از استدلال ریاضی خود در باره این مفروضات نتیجه‌ای بدست میآوریم که بنوبه خود دارای اشتباه معینی‌است وباین‌ترتیب باندازه دفعاتی که قضاوت می کنیم اشتباهات رویهم جمع میشود[۱] .

دوباره به انتگرال‌معین‌بر گردیم و روی‌یك‌مطلب‌آن که‌اهمیت‌اساسی داردتکیه کنیم : تابع $f(x)$ چگونه باشد تا در فاصله $[a,b]$ انتگرال معین $\int_a^b f(x)\cdot dx$ وجود داشته باشد . یعنی در چه حال عددی وجود دارد که مجموع $\sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i$ وقتیکه $\max\Delta x_i \longrightarrow 0$ بسمت آن عدد میل نماید ؟ یاد آور میشویم که این عدد بایستی برای هر نوع تقسیم فاصله $[a , b]$ وهر نوع انتخاب عدد دلخواه ξ_i وجود داشته باشد.

(۲۹) برای توابعی که دارای انتگرال معین هستند ، یعنی برای آنها که حد واقعاً وجوددارد ، گویند که درفاصلهٔ $[a,b]$ قابل انتگرال گیری هستند. بررسیهای مربوطه‌ایکه درقرن گذشته‌انجام گرفت ، نشان داد که‌کلیه توابع اتصالی قابل انتگرال گیری هستند .

توابع انفصالی هم که قابل انتگرال گیری باشند ، وجود دارد . از آن جمله

۱ــ مثلا از $a=b$ و $b=c$ بسادگی نتیجه میشود که $a=c$ ولی درعمل اگر $a=b$ با تقریب ε و $b=c$ با تقریب ε باشد ، $a=c$ با تقریب 2ε خواهد بود.

میتوان توابع محدودی را نام برد که در فاصله [a و b] صعودی یا نزولی‌اند .

تابعی که بازاء اعداد گویای فاصله [a و b] مساوی صفر و بازاءِ اعداد گنگ این فاصله مساوی واحد باشد میتواند بعنوان تابعی که دارای انتگرال نیست (یعنی غیر قابل انتگرال گیریست) نام برده شود ، زیرا برای هر تقسیم دلخواهی از فاصله انتگرال، بسته باینکه بجای ξ_i عدد گویا ویا گنگی انتخاب کنیم مجموع S_n مساوی صفر ویا واحد میشود .

ملاحظه میشود که اغلب، درجواب این‌سؤال که چگونه میتوان انتگرال‌معین را پیدا کرد ، میتوان فرمول نیوتون ـ لایپ نیز را ارائه داد . ولی درینصورت مسئله پیدا کردن تابع اولیه یك تابع‌مفروض، یعنی پیدا کردن تابعی که مشتق آن معلوم باشد ، مطرح میشود و ما هم بهمین مسئله میپردازیم . ضمناً متذکر میشویم که جستجوی تابع اولیه در سایر رشته‌های ریاضی وبخصوص درحل معادلات دیفرانسیل هم اهمیت زیادی دارد.

۱۱

انتگرالهای نامعین ـ روش انتگرال گیری

در ریاضیات معمولست که تابع اولیه یك تابع مفروض دلخواه مانند $f(x)$ را **انتگرال نامعین** $f(x)$ نامیده وبصورت زیرنمایش میدهند :

$$\int f(x)dx$$

باین ترتیب ، اگر $F(x)$ تابع اولیه نامعینی برای $f(x)$ باشد ، دراینصورت انتگرال نامعین $f(x)$ مساوی

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (۳۱)$$

خواهد بود که درآن c مقدار ثابت ودلخواهیست .

همچنین متذکر میشویم که اگر تابع $f(x)$ درفاصله $[a$ و $b]$ مفروض باشد و $F(x)$ تابع اولیه آن و x نقطه‌ای متعلق بفاصله $[a$ و $b]$ باشد ، براساس‌فرمول « نیوتون ـ لایپ نیتز» میتوان نوشت :

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt\,.$$

بنابراین انتگرالی که در سمت راست این تساوی قرار دارد تنها باندازه مقدار ثابت $F(a)$ با تابع $F(x)$ [تابع اولیه $f(x)$] اختلاف دارد. دراینحالت یعنی وقتی که این انتگرال بعنوان انتگرالی که حد بالای آن x است درنظر گرفته شود (x متغیراست) تابع اولیه معینی از $f(x)$ خواهدبود وبنابراین انتگرال نامعین $f(x)$ را بصورت زیر هم میتوان نوشت :

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)dt + c$$

که درآن c مقدار ثابتی است .

دراینجاجدولی‌ازانتگرالهای نامعین مهم‌راکه همان جدول‌مشتقات‌میباشد ذکر میکنیم :

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \ (a \neq -1) \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c^{1} \qquad \int \sec^2 x\,dx = \mathrm{tg}\,x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = (32)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad = -\arccos x + c_1 \left(c_1 - c = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,x + c$$

خواص کلی انتگرالهای نامعین را میتوان براساس خواص مشتقات متناظر آنها استنباط نمود ، مثلا ازقاعده دیفرانسیل گیری مجموع ، فرمول زیر بدست میآید :

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx + c$$

و ازاین قاعده مشتق گیری که اگرتابعی درمقدارثابت k ضرب‌شده باشد ؛ موقع مشتق گرفتن میتوان k را درمشتق تابع ضرب کرد نتیجه میشود :

$$\int Kf(x)\,dx = K \cdot \int f(x)\,dx + c$$

باین ترتیب :

$$\int \left(3x^2 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} - 1\right) dx = 3\,\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^2}{2} - 3\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 4\ln|x| - x + c\,.$$

۱ـ برای $x>0$: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

و برای $x<0$: $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

راههای زیادی برای محاسبه انتگرال نامعین وجود دارد و ما روی بعضی از آنها و بخصوص روی **روش تبدیل** یاتغییرمتغیرتکیه می کنیم که براساس تساوی زیرقرار دارد :

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt + c \qquad (۳۳)$$

$x = \varphi(t)$ تابعی است که بتوان دیفرانسیل‌آن را محاسبه کرد. تساوی (۳۳)بایستی باین مفهوم فهمیده شود که اگر در تابع :

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

که مساوی جزء سمت چپ تساوی (۳۳) است ، بجای x مساویش $\varphi(t)$ راقراردهیم تابعی مانند $F[\varphi(t)]$ بدست آوریم که مشتق آن نسبت به t مساوی جمله زیر علامت انتگرال سمت راست تساوی (۳۳) باشد واین هم مستقیماً از قضیه مشتق‌تابع تابع نتیجه میشود :

چند مثال براساس بکاربردن روش تبدیل ذکر کنیم :

$$\int e^{kx}\,dx = \int e^t \frac{۱}{K}\,dt = \frac{۱}{K}\int e^t dt = \frac{۱}{K}e^t + c = \frac{e^{kx}}{K} + c$$

(تبدیل $Kx = t$ و ازآنجا $Kdx = dt$) .

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} = -\int dt = -t + c = -\sqrt{a^۲ - x^۲} + c$$

(تبدیل $t = \sqrt{a^۲ - x^۲}$ و ازآنجا $dt = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$)

$$\int \sqrt{a^۲ - x^۲}\,dx = \int \sqrt{a^۲ - a^۲\sin^۲ u}\cdot a\cos u\,du = a^۲\int \cos^۲ u\,du$$

$$= a^۲\int \frac{۱ + \cos ۲u}{۲}\,du = \frac{a^۲}{۲}\left(u + \frac{\sin ۲u}{۲}\right) + c =$$

$$= \frac{a}{۲}(u + \sin u\cos u) + c = \frac{a^۲}{۲}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^۲}\sqrt{a^۲ - x^۲}\right) + c$$

(تبدیل $x = a\sin u$)

همانطورکه از امثله مذکور دیده میشود روش تغیرمتغیربطور عمده آن دسته ازتوابع مقدماتی‌را بسط می‌دهد که قابل‌انتگرال گیری‌هستند، یعنی‌میتوانیم تابع‌اولیه

آنها را بدست آوریم . این توابع پس از تغییرمتغیر باز هم بصورت توابع مقدماتی‌در خواهند آمد . بهرصورت بایستی در نظرداشت که از نقطه نظرمحاسبه سروکار داشتن با انتگرال گیری بمراتب مشکل‌تر از سروکار داشتن با دیفرانسیل گیری است .

در قسمت ٦ همین فصل روشن شد که مشتق هرتابع مقدماتی ، تابع مقدماتی دیگری است که میتوان آنرا با استفاده ازقواعد دیفرانسیل گیری بطور کاملامشخص بدست آورد . اما عکس این مسئله همیشه صحیح نیست . زیرا توابع‌مقدماتی وجود دارد که انتگرال نامعین آنها بنوبه خود یك تابع مقدماتی نیست . مثلا میتوان از توابع e^{-x^2} و $\frac{1}{\ln x}$ و $\frac{\sin x}{x}$ و غیره نام برد که برای بدست آوردن انتگرال آنها بایستی از روشهای تقریبی استفاده نمود که معمولا هم بتوابع مقدماتی منجرنمیشود . ما روی این مطلب زیاد معطل نمیشویم ولی‌همینقدر متذکرمیشویم که در ریاضیات مقدماتی میتوان امثله فراوانی در این زمینه پیدا کرد که اگر فی‌المثل بتوان عملی را درباره دسته‌ای از اعداد انجام داد ، انجام عکس آن عمل درباره همین دسته اعداد ممکن نباشد . مثلا مجذور هر عدد مثبت و گویا بنوبه خود عددی است گویا ، ولی جذر هرعددگویا همیشه عددمثبت گویائی نیست .بهمین ترتیب‌دیفرانسیل توابع مقدماتی بنوبه خود توابعی مقدماتی هستند ، در حالیکه انتگرال آنها ممکن است از این دسته توابع نباشد .

بعضی از انتگرالهائی که نمیتوانند بصورت توابع مقدماتی محاسبه شوند ، در ریاضیات و مواردی که به ریاضیات محتاج میشویم ، اهمیت‌بسزائی دارند . ازآن‌قبیل میتوان انتگرال زیررا نام برد :

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

که درنظریه احتمالات نقش بسیار مهمی دارد (بفصل یازدهم مراجعه شود) . همچنین به انتگرالهای زیراشاره می کنیم :

$$(K^2<1)\quad \int_0^\varphi \sqrt{1-K^2\sin^2\theta}\,d\theta \quad \text{و} \quad \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\theta}}$$

که **به انتگرالهای الیپتیك** نوع اول ودوم موسوم بوده وبسیاری‌ازمسائل‌مکانیك و فیزیك منجربه محاسبه آنها میشود (بفصل پنجم قسمت اول مثال۳ مراجعه شود) جداولی‌تشکیل داده‌اند که مقادیراین انتگرالها را بازاءِ مقادیرمختلف‌آرگومانهای x و φ با روش تقریبی ، منتهی با دقت زیاد ، بدست میدهد .

این مطلب را تاکید می کنیم که اثبات جداگانه این حقیقت که این و یا آن تابع مقدماتی پس از انتگرال گرفتن بیك تابع مقدماتی تبدیل نمیشود کار بسیارمشکلی است . این مسئله که حل آن در تکامل آنالیز نقش اساسی داشت فکر برجسته ترین ریاضی دانان آنالیست قرن گذشته را بخود مشغول داشته بود . در این زمینه چبیشف Shébychef به نتایج اساسی رسید،اوبخصوص درباره امکان تبدیل انتگرال :

$$\int x^m(a+bx^s)^p dx$$

بتوابع مقدماتی، مطالعه میکرد ، که در آن m و S و p اعداد گویائی هستند . قبل از چبیشف و بوسیلهٔ نیوتون سه‌رابطه بین قوای m و S و p بدست آمده بود که در آنصورت این انتگرال قابل محاسبه بصورت توابع‌مقدماتی بود. چبیشف ثابت کرد که در بقیه حالات دیگر ، این انتگرال بوسیلهٔ توابع مقدماتی قابل بیان نیست .

روش دیگری از انتگرال گیری یعنی روش جزء بجزء را ذکر کنیم . این‌روش براساس رابطه زیر که برای خواننده روشن است قرار دارد :

$$(uv)'=uv'+u'v$$

این‌رابطه را باین‌ترتیب هم میتوان نوشت :

$$uv'=(uv)'-u'v$$

اکنون اگر ازطرفین رابطه‌بالا انتگرال بگیریم ، باتوجه باینکه :

$$\int(uv)'dx=uv+c$$

تساوی زیر را خواهیم داشت :

$$\int uv'\,dx=uv-\int u'vdx$$

که **فرمول انتگرال گیری جزء بجزء** نام دارد . (دراین رابطه مقدار ثابت c را ننوشته‌ایم زیرا میتوان آنرا جزء یکی انتگرالهای نامعین این تساوی دانست) .

امثله‌ای ازبکار بردن این فرمول ذکر کنیم :

میخواهیم $\int xe^x dx$ را محاسبه کنیم که درآن $u=x$ و $v'=e^x$ می - گیریم ، دراینصورت $u'=1$ و $v=e^x$ خواهد شد و درنتیجهٔ :

$$\int xe^x dx=xe^x-\int 1e^x dx=xe^x-e^x+c$$

در انتگرال $\int \ln x dx$ بطریق مشابهی $u=\ln x$ و $v'=1$ میگیریم ، دراینصورت $u'=\frac{1}{x}$ و $v=x$ خواهد شد و :

$$\int \ln x dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+c$$

همچنین مثال زیر یك مثال نمونه ایست که در آن دو مرتبه از انتگرال

جزءِ بجزء استفاده کرده وسپس انتگرال اصلی را از معادله ای که بدست میآید پیدا میکنیم :

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

وازآنجا :

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{۲}(\sin x - \cos x) + c$$

با این مثال این قسمت را تمام میکنیم ، از این بحث خواننده تنها يك تصور سطحی درباره انتگرال گیری بدست آورد . ما در بارهٔ بسیاری از روشهای این نظریه اصلا صحبتی نکردیم بخصوص در بحث بسیار جالب نظریه انتگرال گیری کسرهای گنگ وارد نشدیم ، بحثی که ریاضی دان و مکانیست مشهور قرن گذشته م . و . اوستروگرادسکی Ostrogradski ودایع مهمی در باره آن از خود باقی گذاشته است .

۱۲

توابع چند متغیره

تا اینجا ما درباره توابعی صحبت کردیم که دارای یك متغیر بودند ، درحالیکه در عمل غالباً بتوابعی برخورد میکنیم که بدو ، سه و یا بطور کلی چند متغیر بستگی دارند . مثلا سطح مستطیل تابعی است از قاعده آن x و ارتفاع آن y :

$$S=x\cdot y$$

حجم مکعب مستطیل تابعی است ازسه بعد آن :

$$V=x\cdot y\cdot z$$

فاصله بین دونقطه A و B تابعی‌است از مختصات این نقاط (۶ متغیر) :

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

فرمول مشهور :

$$P\cdot V=R\cdot T$$

رابطه بین V حجم مقدار معینی گاز در فشار P و درجه حرارت مطلق T را بیان میکند .

توابع چند متغیره هم مثل توابع یك متغیره ، معمولا برای مقادیر معینی از متغیرها داده میشود ، نه هرمقدار غیرمشخص ؛ مثلا تابع :

$$u=\ln(1-x^2-y^2-z^2) \qquad (۳۴)$$

تنها برای مقادیری از x و y و z که درشرط :

$$x^2+y^2+z^2<1 \qquad (۳۵)$$

صدق کند ، داده شده است (بازاءِ سایر مقادیر x و y و z اعداد حقیقی بدست نمیآید) . مجموعه نقاطی از فضا که مختصات آنها در نامساوی (۳۵) صدق کند در داخل کره‌ای قرار دارد که‌مرکزآن برمبداء مختصات منطبق بوده وشعاع آن مساوی

واحد باشد . نقاط واقع برسطح کره را نمیتوان باین نقاط (یعنی نقاط‌واقع در داخل کره) اضافه‌کرد ومثل اینستکه سطح کره را ازآن جدا کرده باشند : چنین کره ای را کره باز گویند . تابع(۳٤) تنها برای اعدادی از(z و y وx) معین‌است که بتوانند مختصات نقاطی ازین کره باز G باشند . بطور خلاصه معمولست که میگویند : تابع (۳٤) برای نقاط داخل کره G معین است .

مثال دیگری ذکر کنیم : درجه حرارت جسم V که بطور غیریکنواخت گرم شده تابعی از x و y و z ، یعنی‌مختصات نقاط این‌جسم میباشد . این تابع هم برای تمام‌اعداد سه‌گانه x وy و z معین‌نیست ، بلکه تنها برای آن‌دسته اعدادمعین است که بتوانند مختصات جسم مفروض V باشند .

بالاخره بعنوان مثال سوم تابع :

$$u = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)$$

را بررسی میکنیم که در آن φ تابعی است یك متغیره که در فاصله [۱ و ۰] معین است . واضحست که تابع u برای آن دسته ازاعداد (z وy وx) مفروض خواهدبود که بتوانند مختصات نقاط واقع درداخل‌مکعب زیرباشند :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ و } 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ و } 0 \leqslant z \leqslant 1$$

تابع سه متغیره را تعریف کنیم : فرض کنیم مجموعه E ازاعداد سه‌گانه (z وy وx) تشکیل شده باشد (نقاطی ازفضا) . بشرطیکه هردسته ازاعداد E (هر نقطه مجموعه E) طبق قانون معینی به عدد مشخص u مربوط باشد . گویند u تابعی است از x وy وz (نقاط) که در مجموعه E معین شده است و بصورت زیر نمایش داده میشود.

$$u = F(x, y, z)$$

بجای Fمیتوان ازحروف دیگرمثل f وφ وΨ هم استفاده کرد

در عمل بعنوان مجموعه E معمولا مجموعه نقاطی را مجسم میکنند که یك جسم هندسی (یا یك ناحیه) را پر کنند : کره ، مکعب ، حلقه و غیره وآنوقت بطور خلاصه میگویند کـه تابع در این‌جسم (یا دراین‌ناحیه) معین است . بهمین ترتیب توابع دومتغیره ، چهارمتغیره وغیره را مشخص میکنند .

توابع ضمنی . خاطر نشان میکنیم که تابع دو متغیره وقتیکه مقدار آن معلوم باشد، نمونه خوبی برای تابع‌یك متغیره است . تابع دومتغیره($F(x, y)$ را در نظر گرفته و معادله :

$$F(x, y) = 0 \qquad (۳٦)$$

را تشکیل میدهیم . این معادله بطورکلی مجموعه‌ای ازنقاط صفحه را معین میکند که بازاء (x , y) آن نقاط ، تابع ما مساوی صفرباشد . دراغلب موارد این مجموعه نقاط تشکیل یك منحنی میدهد که میتوان آنرا منحنی نمایش تغییرات یك ویا چند تابع یك متغیره بشکل $y=\varphi(x)$ ویا $x=\Psi(y)$ دانست . دراینحالت گویند که این توابع باکمك معادله (۳۶) بطورضمنی معین شده‌است . مثلا معادله :

$$x^2+y^2-r^2=0$$

بطور ضمنی دوتابع یك متغیره زیر را معین میکند .

$$y=+\sqrt{r^2-x^2} \quad \text{و} \quad y=-\sqrt{r^2-x^2}$$

ولی باید در نظرداشت که ممکن است معادله بصورت (۳۶) معرف هیچ تابعی نباشد . مثلا واضحست که معادله :

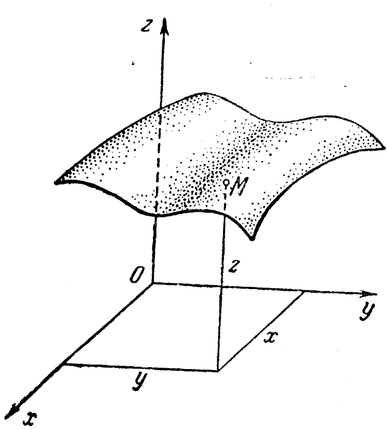
$$x^2+y^2+1=0$$

هیچ تابع حقیقی بدست نمیدهد ، زیرا نمیتوان دوعدد حقیقی پیدا کرد که در معادله بالا صدق کند .

تعبیر هندسی. توابع دومتغیره را میتوان بصورت یك سطح (یعنی بصورتیکه کاملا محسوس وقابل درك باشد) در دستگاه مختصات فضائی نمایش داد ، بدین ترتیب که تابع :

$$z=f(x , y) \qquad (۳۷)$$

در دستگاه مختصات قائم سه بعدی بصورت یك سطح نمایش داده میشود ، این سطح عبارتست ازمکان هندسی نقطه M که مختصات x و y و z آن درمعادله (۳۷) صدق کند (ش ۲۶) .

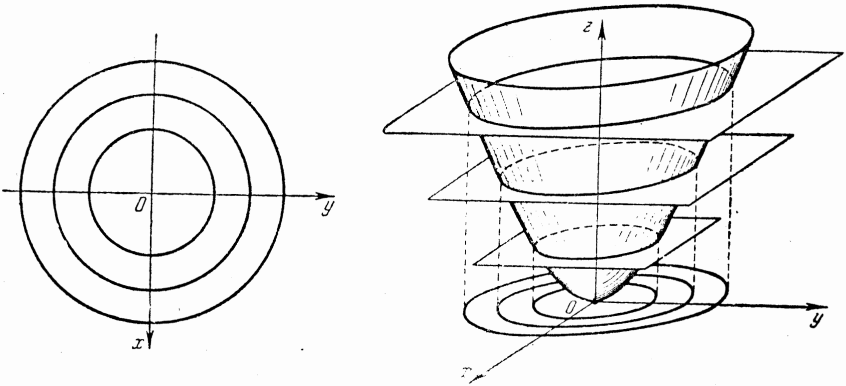


ش ۲۶

وسیله فوق العاده راحت دیگری هم برای نمایش تابع (۳۷) وجود دارد که درعمل مورد استفاده فراوان پیدا کرده‌است . یك سلسله اعداد z_1 و z_2 و . . . . انتخاب کرده و روی oxy منحنی‌های :

$$z_1=f(x, y) \text{ و } z_2=f(x, y) \text{ و }$$

رارسم میکنیم که منحنیهای مسطح‌تابع $f(x, y)$ نامیده میشود . اگراین‌منحنیهای مسطح بوسیله مقادیر مختلف z باندازه کافی نزدیك بهم رسم شود ، میتواند وسیله خوبی برای قضاوت در باره تغییرات تابع $f(x, y)$ باشد . در نقشه کشی هم برای قضاوت درباره تغییرنقاط برجسته ازهمین وسیله استفاده میکنند .



ش ۲۷

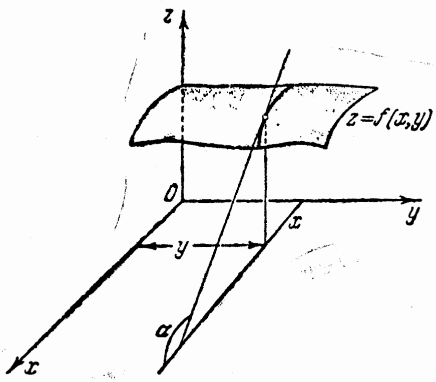
در شکل ۲۷ منحنی‌هـای مسطح تابع $z = x^2 + y^2$ نمـایش داده شده است . درفصل سوم شکل ۵۰ نمونه‌مشابهی درباره‌منحنی‌های مسطح تابع $z=x \cdot y$ نمایش داده شده است .

مشتقات جزئی و دیفرانسیل . ملاحظاتی درباره دیفرانسیل گیری چند متغیره ذکرمیکنیم . بعنوان نمونه تابع دومتغیره

$$z = f(x, y)$$

را انتخاب می کنیم . اگر y را ثابت بگیریم ، یعنی فرض کنیم که y تغییر نمی کند ، تابع دومتغیره به تابعی از یك متغیرx تبدیل میشود . در اینصورت مشتق آن (اگر وجود داشته باشد) ، **مشتق جزئی** نسبت به x نامیده میشود و بیکی از صورتهای زیرنمایش داده میشود :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ و یا } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ و یا } f'_x(x, y) .$$



ش ۲۸

با توجه بآنچه گفتیم معلوم میشود که مشتق جزئی نسبت به x ، در حالت کلی، تابعی از x و y است. بطریق مشابهی مشتق جزئی نسبت به y بدست میآید.

از نظر هندسی تابع مورد بحث در دستگاه مختصات قائم فضائی بوسیلهٔ یك سطح نمایش داده میشود. تابع متناظر آن وقتی که y مقدار ثابتی فرض شود (که تابعی از x خواهد بود) بوسیلهٔ یك منحنی مسطح نمایش داده میشود (ش ۲۸) که از تقاطع سطح مفروض با صفحه‌ای موازی با صفحه oxz و بفاصله y از آن بدست میآید. روشن است که مشتق جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با تانژانت زاویه‌ای که مماس براین منحنی درنقطه (y و z) باجهت مثبت محورxها می‌سازد.

بطورکلی، اگرتابع $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از متغیرهای x_1 و x_2 و . . . . . و x_n مفروض باشد، مشتق جزئی $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ عبارتست ازمشتق این تابع نسبت به x_i وقتی که سایرمتغیرهای :

$$x_1 , x_2 , \dots , x_{i-1} , x_{i+1} , \dots , x_n$$

ثابت فرض شود.

میتوان گفت که مشتق جزئی تابع نسبت به متغیر x_i عبارتست از سرعت‌تغییر این تابع درجهت متغیر x_i . همچنین میتوان مشتق‌را درجهت مفروض دلخواهی که قابل انطباق با هیچیك ازمحورهای مختصات نباشد، بدست آورد. ولی ما دراین باره بحث نمی کنیم.

امثله.

۱ـ $z=\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \text{ و } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

-۲ $$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

-۳ $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

گاهی لازم میشود که از مشتق جزئی هم بنوبه خود مشتقات جزئی گرفته شود ، در اینحالت گویند که مشتق جزئی از مرتبه دوم بدست آمده است . برای توابع دومتغیره چهار مشتق جزئی ازمرتبه دوم وجود دارد .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ و } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ و } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \text{ و } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot$$

ولی‌میتوان ثابت کرد که برای توابع‌متصل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (کـه مشتقات مختلط نامیده‌~~میشود~~) باهم‌برابرند :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \text{ و}$$

مثلا در مورد مثال ۱ که دربالا ذکر کردیم داریم :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ و } \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} \text{ و}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} \quad \text{ و } \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2} \text{ و}$$

و بنابراین همانطور که دیده میشود مشتقات مختلط آنها با هم برابرشده‌اند .

شبیه آنچه که درباره توابع یك متغیره گفتیم میتوان مفهوم دیفرانسیل رابرای توابع چند متغیره هم توضیح داد .

برای روشن شدن مطلب تابع دو متغیره :

$$z = f(x, y)$$

را درنظر می‌گیریم . اگر این تابع دارای مشتقات جزئی متصل باشد ، میتوان ثابت کرد که نموآن یعنی :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

را که متناظر با نمو Δx و Δy است میتوان بصورت :

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

نوشت که در آن $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مشتقات جزئی تابع درنقطهٔ $(x \text{ و } y)$ میباشد و α مقداریست که به Δx و Δy مربوط بوده وضمناً اگر $\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0$ ، مقدار α هم بسمت صفر میل مینماید .

مجموع دو جمله اول تساوی بالا یعنی :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

که بطور خطی[1] به Δx و Δy مربوطست **دیفرانسیل تابع** نامیده‌میشود .

جملهٔ آخر بعلت آنکه در α ضرب شده است (و α هم همراه با Δx و Δy بسمت صفر میل میکند) نسبت به :

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

بی نهایت کوچکی ازمرتبه بالاترست .

نمونه‌ای ازمورد مصرف دیفرانسیل را ذکر کنیم . دورهٔ نوسان پاندول ازروی فرمول :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

محاسبه میشود که درآن l طول پاندول و g شتاب نیروی ثقل است . فرض کنیم که l و g با خطاهائی باندازهٔ Δl و Δg برای ما معلوم باشد . درآنصورت خطائی که در محاسبهٔ T دست می‌دهد مساوی با نمو ΔT خواهد بود که متناظربا نموآرگومانهای Δl و Δg میباشد . با تبدیل تقریبی ΔT به dT خواهیم داشت :

$$\Delta T \# dT = \pi\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{lg}} - \frac{\sqrt{l}\,\Delta g}{\sqrt{g^3}}\right)$$

۱- بطور کلی تابع $Ax+By+C$ که درآن A و B و C مقادیر ثابتی است تابعی خطی از x و y نامیده میشود . اگر $c=0$ باشد، آنرا تابع خطی همگن نامند . دراینجا ما کلمهٔ «همگن» را حذف کرده‌ایم .

خطاهای Δl و Δg برای ما معلوم نیست ، ولی میتوان ΔT را با کمك نامساوی زیر تقویم کرد .

$$|\Delta T| \leqslant \pi\left(\frac{|\Delta l|}{\sqrt{lg}}+\sqrt{\frac{l}{g^{3}}}\,|\Delta g|\right)$$

که پس از تقسیم طرفین بر T خواهیم داشت :

$$\frac{|\Delta T|}{T} \leqslant \left(\frac{|\Delta l|}{l}+\frac{|\Delta g|}{g}\right)$$

و از اینجا درعمل میتوان خطای نسبی را برای T مساوی مجموع خطاهای نسبی برای l و g دانست .

برای اینکه درعلامتگذاری رعایت تقارن بشود ؛ نموهای مستقل Δx و Δy را هم با علامتهای dx و dy نشان داده و آنها را هم دیفرانسیل های x و y می نامیم . باین ترتیب دیفرانسیل تابع $u=f(x, y, z)$ بصورت زیر نشان داده میشود :

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مشتقات جزئی نقش اساسی را درموردتوابع چندمتغیره بازی می کنند (ودرمواردی که آنالیز درمسائل مربوط به صناعت وفیزیك مورد استفاده قرار می گیرد ، اغلب و اغلب به توابع چند متغیره برخورد می کنیم).

در فصل ششم باز هم در بارهٔ خواص مشتقات جزئی صحبت خواهیم کرد .

در زیر نمونه های ساده ای ازمورد استعمال مشتقات جزئی را در آنالیز ذکر می کنیم .

دیفرانسیل توابع ضمنی . فرض می کنیم احتیاج پیدا کرده باشیم مشتق تابع y را نسبت به x بدست بیاوریم ، در حالیکه می دانیم تابع ضمنی بوده و رابطه :

$$F(x, y)=0 \qquad (۳۸)$$

بین متغیرهای x و y برقرار باشد . اگر x و y در رابطهٔ (۳۸) صدق کنند و ما به x نموی مانند Δx بدهیم ، برای y نموی مانند Δy بدستمیآید ، بطوریکه $x+\Delta x$ و $y+\Delta y$ هم در رابطهٔ (۳۸) صدق خواهند کرد . درنتیجه[1] :

۱ــ فرض میکنیم که $F(x, y)$ دارای مشتقات متصلی از x و y باشد .

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+ \alpha\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$$

ازینجا اگر تنها $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ باشد خواهیم داشت :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

و بدین ترتیب توانستیم وسیله‌ای برای محاسبه مشتق توابع ضمنی پیدا کنیم . بدون اینکه قبلا معادله (۳۸) را نسبت به y حل کرده باشیم .

مسائل مربوط به ماکزیمم و می نیمم . اگر تابع دو متغیره $z=f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) ماکزیمم باشد ، یعنی اگر نامساوی $F(x_0, y_0)\geqslant f(x, y)$ برای تمام نقاط (x, y) که به (x_0, y_0) نزدیك‌اند صادق باشد ، دراین‌صورت همین‌نقطه بایستی نقطه حداکثرصعود (ماکزیمم) منحنی باشد که از تقاطع سطح $z=f(x, y)$ با صفحه موازی با oxz یا oyz بدست‌آمده است . بنابراین‌درچنین نقطه‌ای بایستی شرایط :

$$f'_x(x, y)=0 \quad و \quad f'_y(x, y)=0 \qquad (۳۹)$$

بر قرار باشد . همچنین برای نقطه می نیمم محلی هم بایستی همین دو شرط موجود باشد . بنابراین مقادیر حداکثر وحداقل تابع بایستی بین‌نقاطی که در دوشرط (۳۹) صدق می کنند ، جستجو شود . (علاوه بر آن نقاط مرزی یعنی نقاطی را که تابع ما در حوزه آنها داده شده و همچنین نقاطی را که درآنجا برای تابع مشتق وجود ندارد [اگرچنین نقاطی وجود داشته باشد] نباید فراموش کرد).

برای اینکه دانسته شود ، آیا نقاط بدست آمده (x, y) که درشرایط (۳۹) صدق می کنند ماکزیمم هستند یا می‌نیمم ، غالباً از ملاحظات غیر مستقیم مختلفی استفاده می کنند . مثلا اگر بدلیلی روشن باشد که تابع قابل دیفرانسیل گیری است ودر داخل ناحیه مورد بحث دارای می‌نیمم است، واضح است که این‌می‌نیمم را بایستی بین نقاطی جستجو کرد که درشرایط (۳۹) صدق می کنند .

فرض کنید میخواهیم از یك قطعه آهن سفید ، جعبهٔ مکعب مستطیل شکل بدون سرپوشی بحجم مفروض v بسازیم ، بشرطی که مصرف آهن سفید حداقل‌ممکن

باشد . اگر اضلاع قاعده این جعبه را x و y فرض کنیم ، ارتفاع h آن مساوی $\frac{v}{xy}$ خواهد شد وبنابراین سطح S جعبه تابعی از x و y خواهد بود :

$$S=xy+\frac{v}{xy}(2x+2y)=xy+2v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

از آنجا که دراین مسئله x و y بایستی مثبت باشد ، سؤال باینجا منتهی میشود که می‌نیمم $S(x, y)$ رااز بین نقاطی ازمنحنی که درربع اول محورهای مختصات قراردارد جستجو کنیم . ما این قسمت تابع را G مینامیم .

اگرنقطه‌ای از ناحیهٔ G به می‌نیمم برسد بایستی مشتقات جزئی دراین نقطه مساوی صفرشود :

$$\frac{\partial S}{\partial x}=y-\frac{2v}{x^2}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=x-\frac{2v}{y^2}=0,$$

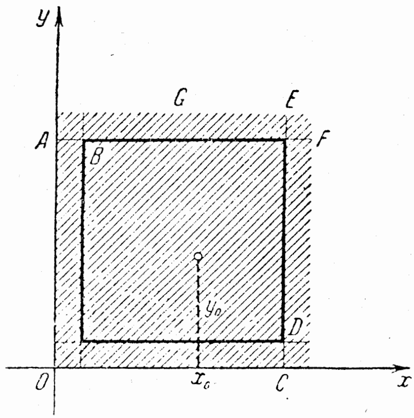
یعنی :

$$yx^2=2v \quad \text{و} \quad xy^2=2v$$

واز اینجا ابعاد جعبه بدست می‌آید :

$$(41)\qquad x=y=\sqrt[3]{2v} \quad \text{و} \quad h=\sqrt[3]{\frac{v}{4}}$$

ما مسئله را حل کردیم ، ولی این حل ، یك حل کاملا مستدل نبود ، ریاضی‌دان دقیق بما میگوید : « شما از ابتدا فرض کردید که در شرایط موجود جعبه یك سطح می‌نیمم وجوددارد وباقبول این فرض اندازه‌های جعبه‌را پیدا کردید . شما چنین استدلال کردید که : اگر در G نقطه‌ای وجود داشته باشد که بازاء مختصات $(x$ و $y)$ آن S می‌نیمم‌شود، بایستی این مختصات ازتساوی (۴۱) بدست آید. حالا ثابت کنید که می‌نیمم S در G وجود دارد ، آنوقت ما صحت نتیجه بدست آمده را قبول خواهیم کرد . »
این مطلب را میتوان مثلا ازاینجا نتیجه گرفت که تابع S درناحیهٔ G دارای ماکزیمم نیست (عدم وجود ماکزیمم بسادگی بدست می‌آید) . علاوه برآن ماثابت خواهیم کرد که چگونه میتوان متقاعدشد که در حالت مفروض تابع ما واقعاً بنقطه‌ای درناحیهٔ G میرسد که می‌نیمم آنست .



ش ۲۹

قضیه اساسی که ما در اینجابآن تکیه خواهیم کـرد و در آنالیز بدقت ثابت میشود ، قضیهٔ زیراست ، اگر تابع f که تابعی از یك یا چند متغیر است ، در ناحیه محدود H (که شامل حدود آنهم‌هست) متصل باشد ، لااقل یك نقطه در H وجود دارد که درآنجا تابع می‌نیمم (ماکزیمم) است . باکمك این‌قضیه‌خواهیم‌توانست بدون اشکال مثال خودرا تا بآخر دنبال کنیم .

نقطهٔ (x_0 , y_0)را درناحیهG درنظرمی گیریم وفرض‌می کنیم که$S(x_0,y_0)$ مساوی N باشد . همچنین عددی مانند R چنان انتخاب میکنیم که در عین حال در دونامساوی $R>N$ و $2VR>N$ صدق کند ومربع Ω_R را بضلع R^2 طبق شکل ۲۹ میسازیم بطوریکه در آن $AB=CD=\frac{1}{R}$ باشد .

تابع $S(x , y)$ را در نقاط مربوط بناحیه G و خارج مربع Ω_R ارزیابی می‌کنیم . اگر نقطه مربوط بناحیه G دارای طول $x<\frac{1}{R}$باشدخواهیم‌داشت:

$$S(x , y)=xy+2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)>2V.\frac{1}{x}>2VR>N$$

بهمین ترتیب اگر نقطه مادارای عرض$y<\frac{1}{R}$ باشد بازهم $S>N$ خواهد شد . سپس اگر نقطه‌ای ازناحیه G بطول$x>\frac{1}{R}$ وبالای خطAFیا بعرض$y>\frac{1}{R}$ و سمت راست CE باشد خواهیم داشت :

$$S(x , y) > xy > \frac{1}{R} \cdot R^2 = R > N .$$

بنابراین برای تمام نقاط (x , y) ناحیه G که در خارج مربع Ω_R واقع باشند، نامساوی $S(x , y) > N$ صادق میباشد و از آنجا که $S(x_0 , y_0) = N$ فرض شده، نقطه (x_0 , y_0) درخارج مربع نبوده وبنابراین می‌نیمم تابع درناحیه G برمی‌نیمم روی مربع منطبق‌است.

ولی تابع $S(x , y)$ در داخل وهمچنین درمرزهای این مربع اتصالی است، بنابراین براساس قضیه‌ای که دربالا ذکر کردیم درمربع مفروض‌نقطه‌ای مانند (x , y) وجود دارد که تابع ما درآن نقطه نسبت بنقاط‌مربوط به مربع وبنابراین نقاط‌مربوط بناحیه G می‌نیمم خواهد بود. باین ترتیب وجود می‌نیمم ثابت شد.

استدلالی که دربالا ذکر کردیم میتواند نمونه استدلالی‌باشد که برای جستجوی ماکزیمم یا می‌نیمم توابع درناحیه نامحدود بکار میرود.

دستور تیلور. توابع چند متغیره را هم مثل توابع یك متغیره میتوان بوسیله دستور تیلور بیان کرد. مثلا تجزیه تابع:

$$u = f(x , y)$$

در اطراف نقطه (x_0 , y_0)، بشرطی که محدود بقوای اول و دوم $(x - x_0)$ و $(y - y_0)$ باشد بصورت زیردرخواهدآمد:

$$f(x , y) = f(x_0 , y_0) + [f'_x(x_0 , y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0 , y_0)(y - y_0)] + \frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0 , y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0 , y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0 , y_0)(y - y_0)^2] + R_3 .$$

ضمناً اگر تابع $f(x , y)$ دارای مشتقات جزئی درجه دوم اتصالی باشد، وقتی که $r \to 0$. جمله باقیمانده سریع تر از

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

یعنی سریعتر از مجذور فاصلهٔ بین نقاط (x , y) و (x_0 , y_0) بسمت صفر میل میکند. دستورتیلور وسیلهٔ‌کاملا کلی برای محاسبه تقریبی مقدار توابع مختلف بدست میدهد.

متذکر میشویم که بکمك این دستور میتوان بسئوالی که در بالا مطرح کردیم جواب داد. سئوال چنین بود: آیا در نقطه ای که $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ است‌برای‌تابع

ماکزیمم وجود دارد یا می‌نیمم ؟ در حقیقت اگر این شرایط در نقطه ای مانند $(x_. \text{و} y_.)$ صادق باشد ، برای نقطه $(x \text{و} y)$ که نزدیک $(x_. \text{و} y_.)$ است ، تفاوت مقدار تابع با $f(x_. \text{و} y_.)$ طبق دستور تیلور مساوی :

$$(\text{٤٢}) \quad f(x \text{ و } y) - f(x_. \text{ و } y_.) =$$

$$\frac{1}{2!}[A(x-x_.)^2 + 2B(x-x_.)(y-y_.) + C(y-y_.)^2] + R_3$$

خواهد بود که در آن A و B و C بترتیب مساوی با مشتقات جزئی درجه دوم f''_{xx} و f''_{xy} و f''_{yy} درنقطه $(x_. \text{و} y_.)$ خواهد بود .

اگر تابع :

$$\Phi(x \text{ و } y) = A(x-x_.)^2 + 2B(x-x_.)(y-y_.) + C(y-y_.)^2$$

درمواردی که $(x-x_.)$ و $(y-y_.)$ با هم مساوی صفر نیستند ، مثبت باشد . طرف راست تساوی (٤٢) هم برای مقادیر کوچك $(x-x_.)$ و $(y-y_.)$ مثبت خواهد بود . زیرا واضح است که برای مقادیر کوچك $(x-x_.)$ و $(y-y_.)$ ، R_3 از $\frac{1}{2}\Phi(x \text{و} y)$ کوچکتراست . ازاینجانتیجه‌خواهدشد که درنقطه $(x_. \text{و} y_.)$ تابع f می‌نیمم است . برعکس ، اگرتابع $\Phi(x \text{و} y)$ برای مقادیردلخواه $(x-x_.)$ و $(y-y_.)$ منفی باشد ، نتیجه میشود که تمام قسمت سمت راست تساوی (٤٢) برای مقادیر کوچك $(x-x_.)$ و $(y-y_.)$ منفی بوده و درنقطهٔ $(x_. \text{ و } y_.)$ ماکزیمم خواهد بود .

درحالتهای بغرنج تر بایستی‌جملات بعدی مربوط به دستورتیلوررا مورد بررسی قرار داد .

مسائل مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم توابع سه یا چند متغیره از طریق کاملا تحلیلی حل و مطالعه میشود . خواننده میتواند بعنوان تمرین ثابت کند که اگر نقاط مفروض :

$$P_1(x_1 \text{و} y_1 \text{و} z_1) \text{ و } P_2(x_2 \text{و} y_2 \text{و} z_2) \text{ و } \ldots\ldots \text{ و } P_n(x_n \text{و} y_n \text{و} z_n)$$

با جرمهای :

$$m_1 \text{ و } m_2 \ldots\ldots \text{ و} m_n$$

درفضا مستقر شده باشند ، وضع M این دستگاه نسبت به نقطه $P(x \text{ و } y \text{ و } z)$ که مساوی باحاصل ضرب جرم درمربع فاصله آنها ازنقطه P :

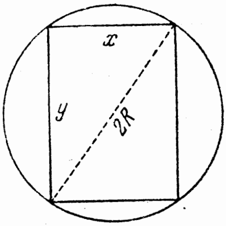
$$M(x, y, z)=\sum_{i=1}^{n} m_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$$

میباشد ، وقتی می‌نیمم میشود که نقطه P باصطلاح درمرکز ثقل‌دستگاه قرار گیرد، مختصات مرکز ثقل دستگاه چنین است :

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad y=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad z=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی. برای توابع‌چندمتغیره میتوان مسائل‌مختلفی در باره ماکزیمم ومی‌نیمم مطرح کرد . این مطلب را با یك مثال ساده روشن میکنیم فرض کنیم که میخواهیم بین مستطیل هائی که میتوان در دایره ای بشعاع R محاط کرد ، مستطیلی پیدا کنیم که سطح‌آن حداکثرباشد.

سطح مستطیل برابراست با حاصل‌ضرب اضلاع‌آن xy ، ضمناً x و y مثبت بوده ودرحالت‌مفروض‌رابطه $x^2+y^2=(2R)^2$ بین‌آنها برقراراست(ش۳۰)· بنابراین بایستی ماکزیمم تابع $f(x, y)=x.y$ را بین مقادیری از x و y که در رابطه $x^2+y^2=4R^2$ صدق میکنند ، پیدا کرد .



ش ۳۰

در عمل باین قبیل مسائل غالباً بر خورد میکنیم ، مسائلی که در آنها بایستی ماکزیمم (یا می‌نیمم) تابعی مانند $f(x, y)$ را بین مقادیری از x و y که در رابطه‌ای مانند $\varphi(x, y)=0$ صدق کنند ، پیدا کرد .

واضح است که میتوان معادله $\varphi(x, y)=0$ را نسبت به y حل کرد وسپس مقدار بدست آمده y را در $f(x, y)$ قرارداد وماکزیمم معمولی تابع یك متغیره (x) را بدست‌آورد . ولی این طریق معمولا بغرنج و گاهی هم غیرقابل اجرا میشود .

برای حل این قبیل مسائل درآنالیز وسیلهٔ فوق‌العاده راحت تری بوجود آمده است که بروش ضرایب لاگرانژ معروف است . ایدهٔ اصلی این روش خیلی ساده‌است. تابع :

$$F(x, y)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$$

را که درآن λ عدد ثابت دلخواهی‌است ، درنظر میگیریم. واضح است بازاء مقادیری از x و y که در رابطه $\varphi(x , y)=0$ صدق کند ، مقدار $F(x , y)$ مساوی با $f(x , y)$ خواهد شد .

ماکزیمم تابع $F(x , y)$ را بدون اینکه برای x و y حدی قائل شویم پیدا میکنیم . در نقطه ماکزیمم بایستی شرایط $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$ [1] را رعایت کنیم .

این شرایط را میتوان چنین نوشت :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \qquad (۴۳)$$

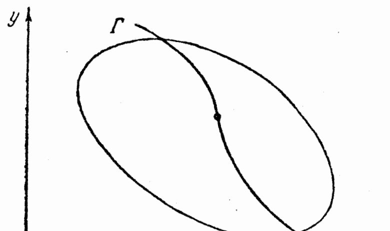
$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \qquad (۴۴)$$

مقادیر x و y درنقطه ماکزیمم $F(x , y)$ ، ازحل دستگاه معادلات (۴۳) و (۴۴) بدست می آید و طبعاً به ضریب λ که دراین معادلات وارد است مربوط میباشد . حالا فرض می کنیم که بتوانیم عدد λ را چنان انتخاب کنیم که مختصات نقطه ماکزیمم در شرط :

$$\varphi(x , y)=0 \qquad (۴۵)$$

صدق کند ، دراینصورت این نقطه ماکزیمم محلی در مسئله مفروض خواهد بود .

در حقیقت مطلب مورد بحث را میتوان بطریق هندسی چنین مشاهده کرد . تابع $f(x , y)$ در حوزه‌ای مانند G داده شده است (ش۳۱). شرط $\varphi(x , y)=0$ را معمولا میتوان بصورت یك منحنی مانند Γ در آورد . بایستی حد اکثر مقدار $f(x , y)$ را بین نقاط منحنی Γ پیدا کرد . اگر درنقطه‌ای روی Γ ماکزیمم $F(x , y)$ وجود داشته باشد در اینصورت مقدار $F(x , y)$ بازاء نقاطی از منحنی Γ که درنزدیکی این نقطه (یعنی نقطه ماکزیمم) واقع شده‌اند ، نسبت باین نقطه ترقی نمی‌کند . ازطرف دیگر درطول Γ مقدار



ش ۳۱

[1] ـ البته صحبت برسر ماکزیممی است که داخل حوزه تابع $F(x , y)$ بآن میرسیم . توابع $f(x , y)$ و $\varphi(x , y)$ قابل دیفرانسیل گیری فرض شده‌اند .

$F(x, y)$ با $f(x, y)$ مساویست. بنابراین با حرکت کوچکی روی منحنی، تابع $f(x, y)$ ترقی نمیکند و درنتیجه دراین نقطه ماکزیمم محلی است.

این ملاحظه وسیله ساده‌ای برای حل مسائل بدست میدهد. معادلات (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) را تشکیل میدهیم، سپس این دستگاه معادلات را نسبت بمجهولات x و y و λ حل میکنیم، یك یا چند جواب:

$$(x_1, y_1, \lambda_1) \text{ و } (x_2, y_2, \lambda_2) \text{ و } \ldots\ldots$$

بدست می‌آید. به نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و ...... نقاط حدی G، یعنی نقاطی که در آنجا منحنی Γ از حوزه G خارج میشود اضافه میکنیم. سپس بین همه این نقاط نقطه‌ای را انتخاب میکنیم که در آن $f(x, y)$ حداکثر (یاحداقل) مقدار را داشته باشد.

البته، استدلالی که کردیم هنوز کاملا صحت این راه را نشان نمی‌دهد. درحقیقت ثابت نکردیم که نقطه‌ای از $f(x, y)$ را که نسبت به نقاط مجاورش روی منحنی Γ ماکزیمم محلی است میتوان بعنوان ماکزیمم تابع $F(x, y)$ بازاء مقداری از λ بدست آورد. ولی این مطلب را میتوان ثابت کرد ودرهمه کتاب های درسی آنالیزهم ثابت میکنند که هرنقطه (x_0, y_0) ماکزیمم محلی $f(x, y)$ روی منحنی Γ را میتوان بطریق مذکور دربالا پیدا کرد، تنها شرطش اینستکه دراین نقطه مشتقات $\varphi'_x(x_0, y_0)$ و $\varphi'_y(x_0, y_0)$ باهم مساوی صفر نشوند[1].

روش لاگرانژ را در باره مثالی که دربالا ذکر کردیم بکار بریم: در این حالت $f(x, y)=xy$ و $\varphi(x, y)=x^2+y^2-4R^2$ میباشد. معادلات (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) را تشکیل میدهیم:

$$\begin{cases} y+2\lambda x=0 \\ x+2\lambda y+0 \\ x^2+y^2=4R^2 \end{cases}$$

ازآنجا، با درنظر گرفتن اینکه x و y مثبت‌اند، جواب های زیر را بدست می‌آوریم:

$$x=y=R\sqrt{2} \qquad \left(\lambda=-\frac{1}{2}\right)$$

۱ـ در دوره ریاضیات عالی تألیف و. ای. سمیرنف (جلد ۱ صفحه ۳۹۴) مثال ساده‌ای ذکر شده است که اگر روش لاگرانژ را بطور مکانیکی و بدون در نظر گرفتن اینشرط بکار بریم، مسئله غیرقابل حل میشود.

برای این مقادیر x و y ، یعنی درحالتی که مربع‌محاطی‌داشته‌باشیم ، سطح‌ماکزیمم را خواهیم داشت .

روش لاگرانژ را برای توابع سه یا چند متغیره هم میتوان بکاربرد . دراینجا ممکن است چند شرط شبیه شرط (۴۵) داشته باشیم (البته کمتر ازتعداد متغیرها) و درنتیجه متناظراً ضرایب کمکی هم خواهیم داشت .

اینهم دو نمونه از مسائلی که باید ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آنها را پیدا کرد :

مثال ۱ . ارتفاع h و شعاع r یك ظرف استوانه‌ای شکل رو بازی بگنجایش مفروض v چقدر باشد تابرای ساختن آن کمترین مصالح ممکنه بکار برده شود. یعنی سطح جدار و کف دایره‌ای شکل آن می‌نیمم باشد ؟

واضح است مسئله باینجا منجر میشود که بایستی‌می‌نیمم تابع متغیرهای r و h یعنی :

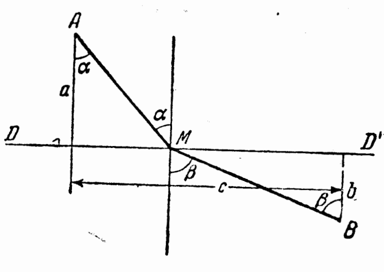
$$f(r , h) = ۲\pi rh + \pi r^۲$$

را با رعایت شرط $\pi r^۲ h = v$ که میتوان بصورت :

$$\varphi(r , h) = \pi r^۲ h - v = ۰$$

نوشت ، پیداکرد .

مثال ۲ . نقطه متحرکی باید از A تا B حرکت کند (ش ۳۲) . این‌متحرك فاصله AM را باسرعت $v_۱$ وفاصله MB را باسرعت $v_۲$ می‌پیماید نقطه M را روی خط DD' در چه محلی باید انتخاب کرد تا مجموع راه از A تا B با حداکثر سرعت طی‌شده باشد ؟



ش۳۲

زوایای α و β راکه درشکل ۳۲ نشان داده شده‌است مجهول انتخاب میکنیم طولهای a و b یعنی طول عمودهائی که از A و B برخط DD' فرود آمده است وفاصله c یعنی‌فاصله بین‌پاهای این‌عمودها معلوم‌است . بسادگی دیده‌میشود که زمانی که برای‌طی همه راه لازم است ، مساویست با :

$$f(\alpha , \beta) = \frac{a}{v_۱ \cos \alpha} + \frac{b}{v_۲ \cos \beta}$$

بایستی می‌نیمم این رابطه را با توجه‌باینکه بین α و β رابطه :

$$a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = c$$

برقرار است ، پیدا کرد .

خواننده خود میتواند مثالهای داده شده را با روش لاگرانژ حل کند . درمثال دوم بسادگی باین نتیجه میرسیم که مناسب ترین وضع استقرار M موقعی است که شرط زیر برقرار باشد .

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

واین قانون مشهور انکسارنوراست . بنابراین شعاع نور ضمن عبور ازیك ملاءِ به ملاء دیگر چنان می‌شکند که وقت عبور آن از نقطه‌ای در ملاء اول به نقطه ای در ملاءِ دوم می‌نیمم باشد . نتایج بدست آمده نه تنها وسیله محاسبه ای هستند ، بلکه برای بهترشناختن بسیاری از پدیده های مورد علاقه ما هم مورد استفاده قرار میگیرند . این نتایج کمك می کنند که علوم دقیقه طبیعی عمیق‌تر شده و بطرف قوانین‌کلی‌طبیعت بروند .

بالاخره متذکر میشویم که ضریب λ ، که برای حل مسئله با کمك روش لاگرانژ داخل مسئله شده است ، تنها بعنوان اعداد کمکی‌نیستند ، بلکه بسته بنوع مسئله ، معرف یك‌مفهوم‌کلی ازمسئله مورد بحث میباشد .

۱۳

تعمیم مفهوم انتگرال

در قسمت ۱۰ همین فصل انتگرال معین تابع $f(x)$ را در فاصله $[a \text{ و } b]$ حدمجموع:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

دانستیم ، بشرطی که بزرگترین قسمت Δx_i از تقسیمات فاصله $[a \text{ و } b]$ بسمت صفر میل کند . با وجوداینکه این دسته توابع $f(x)$ ، یعنی توابعی که واقعاً دارای چنین حدی باشند (قابل انتگرال گیری باشند) خیلی زیادند و بخصوص شامل تمام توابع اتصالی وبسیاری ازتوابع انفصالی میشود ، معهذا فوق‌العاده‌ناقص و محدودند .

اگر مقدار دو تابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ راکه قابل انتگرال گیری هستند ، جمع تفریق ، ضرب و درشرایط معینی برهم تقسیم کنیم ، میتوان ثابت کرد که بازهم تابعی بدست می آید که قابل‌انتگرال گیری‌است. برای $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ هم ، بشرطی کـه مقدار $\frac{1}{\varphi(x)}$ در فاصله $[a \text{ و } b]$ محدود باشد ، این حکم صحیح است . ولی اگر تابعی را نتیجه انتقال حدی توابع $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ و . . . . . (که همه قابل انتگرال گیری هستند)بدانیم ، بطوریکه بازاء تمام مقادیر x واقع درفاصله $[a \text{ و } b]$ داشته باشیم .

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ و}$$

دراینصورت اجباری ندارد که‌تابع $f(x)$ قابل انتگرال گیری باشد .

از این قبیل حالات در ریاضیات زیاد است . در حقیقت در ریاضیات با استفاده وسیع ازانتقال حدی ترکیبات زیادی بوجود میآورند .

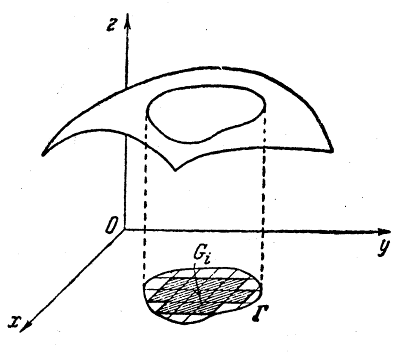
بر اساس نتیجه‌گیری ازاین حالت تعمیم های بعدی مفهوم انتگرال پیدا شد. مهمترین این تعمیم ها ، انتگرال لبگ Henri _ Lebesgue است که خواننده در فصل پانزدهم که به‌تئوری توابع با متغیرحقیقی اختصاص‌دارد ، باآن آشنا خواهدشد . ما هم در اینجا به نوع دیگری از تعمیم انتگرال که در عمل اهمیت زیادی دارد می پردازیم :

انتگرال مرکب . ما با جریان انتگرال‌گیری توابع یك متغیره در میدان یك بعدی (فاصله از a تا b روی منحنی) آشنا شده‌ایم . شبیه همین جریان را درتوابع دو، سه وبطورکلی چند متغیره هم (درمیدان مفروض مربوطه آنها) میتوان عمومیت داد .

مثلا فرض کنید که دردستگاه مختصات قائم ، سطح :

$$z = f(x , y)$$

و درصفحه oxy ، میدان G که بوسیله منحنی مسدود Γ محدود شده است ، داده شده باشد . میخواهیم حجم محدود بین سطح مفروض z وصفحه oxy و سطح استوانه ای که از حرکت خطی بموازات oz ومتکی برمنحنی Γ بدست آمده است ، پیدا کنیم (ش ۳۳) ، برای حل این مسئله سطح میدان G را بکمك پاره خطهای موازی با محورهای ox و oy به‌قطعات کوچکترتقسیم می ـ نمائیم و آن قطعاتی را که مربع مستطیل‌کامل اند با حروف :



ش ۳۳

$$G_1 \text{ و } G_2 \text{ و } \ldots\ldots \text{ و } G_n \text{ و}$$

نامگذاری میکنیم · اگر پاره خطها را باندازه کافی نزدیك بهم انتخاب کنیم ، قسمت مهمی از میدان G بوسیله مربع مستطیلهای نامبرده پوشیده خواهد شد. درهریك از این مستطیلها نقطه دلخواهی:

$$(\xi_۱ ، \eta_۱) ، (\xi_۲ ، \eta_۲) ، \ldots\ldots (\xi_n ، \eta_n)$$

انتخاب‌میکنیم وبرای سادگی مقدارسطح مستطیل G_i راهم باهمان G_i نشان میدهیم حالا مجموع زیررا تشکیل میدهیم :

$$(۴۷)\quad S_n = f(\xi_۱ ، \eta_۱)G_۱ + f(\xi_۲ ، \eta_۲)G_۲ + \ldots\ldots + f(\xi_n ، \eta_n)G_n = \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i ، \eta_i)G_i \,.$$

واضح است که اگرسطح مفروض متصل باشد وپاره‌خطها را باندازه کافی نزدیك بهم انتخاب کرده باشیم ، این مجموع نزدیك به حجم v خواهد بود · حجم دقیق v وقتی بدست میآید که حد مجموع (۴۷) را وقتی که تقسیمات فوق العاده کوچك باشد ، بدست آوریم (یعنی فرض کنیم که بزرگترین قطر مربع مستطیلها بسمت صفر میل کند ·

$$(۴۸)\qquad \underset{\operatorname{Max} d(G_i)\to ۰}{\text{حد}} \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i ، \eta_i)\, G_i = v \,.$$

از نقطه نظرتحلیلی برای تعیین حجم v بایستی روی تابع $f(x ، y)$ ومیدان G ، اعمال ریاضی که در سمت چپ تساوی (۴۸) نشان داده شده است ، انجام داد . این عمل را عمل انتگرال گیری f درمیدان G گویند و نتیجه آن بوسیله انتگرال f درمیدان G بدست می‌آید . این نتیجه را بشکل زیر نمایش میدهند :

$$(۴۹)\qquad \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \underset{\operatorname{Max} d(G_i)\to ۰}{\text{حد}} \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i ، \eta_i) G_i \,.$$

بطریق مشابهی میتوان انتگرال توابع سه متغیره را در میدان‌سه‌بعدی G که معرف یك جسم‌فضائی‌است ، معین کرد. در اینحالت میدان G را بوسیله‌صفحاتی‌موازی با صفحات مختصات ، به قسمتهائی تقسیم می کنیم . بین این قسمتها ، آنهائی کـه متوازی‌السطوح‌کامل‌اند انتخاب کرده وباسامی :

$$G_۱ ، G_۲ ، \ldots\ldots ، G_n$$

نشان میدهیم · در داخل هریك ازین متوازی‌السطوح ها ، نقطه دلخواهی :

$$(\xi_1 ,\ \eta_1 ,\ \zeta_1) ,\ (\xi_2 ,\ \eta_2 ,\ \zeta_2) ,\ \cdots ,\ (\xi_n ,\ \eta_n ,\ \zeta_n)$$

انتخاب کرده ومجموع زیررا تشکیل میدهیم .

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i ,\ \eta_i ,\ \zeta_i)G_i , \qquad (50)$$

که درآن G_i نمایندهٔ حجم متوازی‌السطوح G_iاست . بالاخره‌انتگرال $f(x,y,z)$ درمیدان G را بوسیله حد مجموع (۵۰) وقتی که بزرگترین‌قطر $d(G)$ بسمت صفر میل کند نمایش میدهیم :

$$\lim_{\operatorname{Max} d(G_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i ,\ \eta_i ,\ \zeta_i)G_i = \iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (51)$$

مثالی را بررسی کنیم : فرض می کنیم که‌میدان G از جرم نامتجانسی پر شده باشد وضمناً تابع $\rho(x ,\ y ,\ z)$ که معرف توزیع چگالی جرم درمیدان G میباشد معین‌باشد . چگالی $\rho\ (x ,\ y ,\ z)$ جرم در نقطه $(x ,\ y ,\ z)$ عبارتست از حد نسبت جرم قسمت کوچکی ازجسم که شامل نقطه $(x ,\ y ,\ z)$ است بحجم آن ، وقتی که قطر[1] این قسمت بسمت صفر میل نماید . برای تعیین جرم جسم G بایستی باینطریق استدلال کرد . میدان G را بوسیله صفحاتی موازی با محورهای مختصات ، بقسمتهای کوچك تقسیم کرده و متوازی‌السطوحهای‌کاملی که باین ترتیب بدست میآید باسامی :

$$G_1 ,\ G_2 ,\ \cdots\cdots ,\ G_n$$

نشان میدهیم . اگـــر صفحـــات تقسیم‌کننده میدان G را باندازهٔ کافی نزدیك بهم بگیریم ، با حذف قسمتهای نامنظم میدان خطای کوچکی خواهیم داشت . از طرف دیگر جرم هریك ازقسمت‌های منظم G_i (متوازی‌السطوحهای‌کامل) ، تقریباً ازروی حاصل ضرب .

$$\rho(\xi_i ,\ \eta_i ,\ \zeta_i)G_i .$$

بدست میآید که در آن $(\xi_i ,\ \eta_i ,\ \zeta_i)$ مختصات نقطه دلخواهی از G_i میباشد .

درنتیجه مقدار تقریبی جرم M مساوی مجموع زیرخواهد بود :

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i ,\ \eta_i ,\ \zeta_i)G_i ,$$

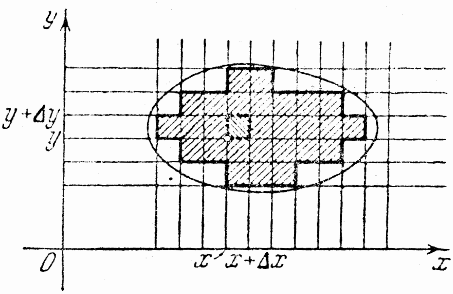
۱ــ بزرگترین فاصلهٔ بین دونقطه ازاین قسمت را قطرآن مینامیم .

ومقدار دقیق آن وقتی بدست می‌آید که حد این مجموع را ، بشرطی که بزرگترین قطر G_i بسمت صفرمیل کند بدست آوریم یعنی :

$$M = \iiint_G \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz = \lim_{\max d(G_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)G_i$$

انتگرال های (۴۹) و (۵۱) را بترتیب انتگرالهای مرکب دوگانه وسه‌گانه می‌نامند .

مسئله ای انتخاب میکنیم که منجر بانتگرال مرکب دوگانه شود . فرض میکنیم که در یك سطح مستوی آب نفوذ کند ، علاوه بر آن درنقاط مختلف سطح ، آب با شدتهای مختلف $f(x, y)$ تراوش کند (یا برعکس بزمین فرو رود) . میدان بسته و محدود G را تقسیم میکنیم (شکل۳۴) وفرض میکنیم که شدت $f(x,y)$ برای ما معلوم باشد ، یعنی مقدار آب زیر زمینی که در هردقیقه ازیك سانتیمتر مربع زمین تراوش میکند درهرنقطه میدان G معلوم باشد (در هر نقطه که آب زیر زمینی بیرون میجوشد



ش ۳۴

$f(x, y) > 0$ وهرجاکه آب بزمین فرو رود $f(x, y) < 0$ است) . میخواهیم به‌بینیم درتمام میدان G دقیقه‌ای چقدرآب بیرون می‌آید ؟

اگر میدان G را به قسمتهای کوچکی تقسیم‌کنیم و $f(x, y)$ را درهریك از این تقسیمات ثابت بگیریم ، آنوقت مقدار تقریبی آبی که خارج میشود میتوانیم حساب‌کنیم . سپس اگر حد این مقدار را وقتی که تقسیمات را فوق العاده کوچك بگیریم ، حساب کنیم مقدارآبی که ازرمین مفروض تراوش می کند بصورت انتگرال زیر درخواهد آمد :

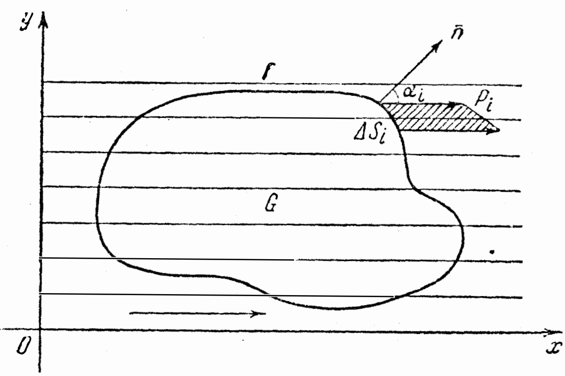
$$\iint_G f(x, y)dx\,dy$$

انتگرالهای‌دوگانه (مضاعف) را اولین بار اولر Euler موردبررسی قرارداد.

انتگرال‌های مرکب موارد استفاده فراوانی در محاسبات و بررسیهای فوق‌العاده متنوع پیدا کرده است.

میتوان ثابت کرد (ولی ما در اینجا بآن نپرداختیم) که محاسبه انتگرالهای مرکب منجر بتکرار محاسبه انتگرالهای ساده میشود.

انتگرالهای محیطی وسطحی. بالاخره بایستی متذکرشد که بازهم تعمیمهای دیگری ازمفهوم انتگرال وجود دارد. مثلا مسئله مربوط به تعیین کارنیروی متغیری که برنقطه مادی اعمال میشود، بشرطی که نقطه بر منحنی مفروضی حرکت کند، منجربانتگرال باصطلاح منحنی‌الخط (محیطی) میشود و مسئله‌مربوط به‌پیدا کردن بارکلی یك سطح، که الکتریسیته با تکاثف سطحی مفروضی لاینقطع روی‌آن



ش ۳۵

توزیع میشود، منجر بمفهوم جدیدی بنام انتگرال درروی‌سطح میشود.

مثلا فرض کنید که مایعی درفضا جریان داشته باشد (شکل۳۵) وضمناً سرعت ذرات مایع درنقطه (x, y) بوسیله تابع $P(x, y)$ بیان شود. بنابراین سرعت‌به z مربوط نیست. اگربخواهیم مقدار مایعی که درهر دقیقه از حدود محیط Γ[1] جریان پیدا میکند، تعیین کنیم. میتوان بطریق زیر استدلال کرد: Γ را به قسمتهای ΔS_i تقسیم می کنیم. مقدارآبی که ازهرقسمت ΔS_i جریان پیدا می کند، تقریباً مساوی با ستون مایعی است که در هر دقیقه از قطعه ای که ΔS_i روی Γ جدا کرده، عبور میکند (و درشکل ۳۵ سایه زده‌شده است). اما سطح متوازی الاضلاع سایه خورده

۱ــ دقیق تر باید گفت: مقدار آبی که ازحدود سطح استوانه‌ای که قاعده آن Γ وارتفاع آن واحد است جریان می‌یابد.

مساوی :

$$P_i(x , y) \cdot \Delta S_i \cdot \cos \alpha_i$$

که درآن α_i عبارتست از زاویه بین جهت $\overline{x}$ محور x ها وعمود $\overline{n}$ که ازمیدانی که بوسیله Γ محدود شده ، بر مماسی که جهت آنرا میتوان جهت تقریبی قطعه ΔS_i دانست ، اخراج شده باشد . با جمع سطوح این متوازی‌الاضلاعها و محاسبه حداین مجموع ، وقتی که تقسیمات محیط Γ فوق العاده کوچك باشد ، مقدار مایعی که در یك دقیقه از محیط Γ جریان پیدا می کند بدست می آید . این حد را باین ترتیب نمایش میدهند :

$$\int_{\Gamma} P(x, y) \cos(\overline{n} , \overline{x})\, dS$$

و انتگرال منحنی‌الخط نامیده میشود . اگر جریان مایع موازی نباشد ، دراینصورت سرعت جریان مایع در هر نقطه (x , y) درطول محور x ها مساوی $P(x , y)$ و در طول محور y ها مساوی $Q(x , y)$ خواهد بود . دراینحالات هم با استدلال مشابهی میتوان ثابت کرد که مقدار آبی که از محیط Γ جریان پیدا میکند مساوی است با :

$$\int_{\Gamma} [P(x , y) \cos(\overline{n} , \overline{x}) + Q(x , y) \cos(\overline{n} , \overline{y})] dS^{۱}$$

وقتی که صحبت برسر انتگرال درسطح G که نقاط $M(x , y , z)$ آن بوسیله تابع $f(M)$ معلوم باشد ، مساوی حد مجموع زیرخواهد بود .

$$\text{حد} \sum_{i=۱}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i = \iint_G f(x, y , z)\, d\sigma$$

بشرطی که تقسیمات میدان G ، که انتگرال درآن گرفته میشود، بقطعات فوق‌العاده کوچکی بسطح $\Delta\sigma_i$ تقسیم شده باشد .

برای محاسبه انتگرالهای مرکب محیطی و سطحی ، هم روشهای کلی و هم روشهای تقریبی وجوددارد.

۱ــ ازآنجاکه برای قطعات کوچك وجدا ازهم منحنی ، دیفرانسیل y مساوی با $\cos(\overline{n} , \overline{x})ds$ و دیفرانسیل dx مساوی با $\cos(\overline{x} , \overline{y})ds$ — میباشد غالباً این انتگرال را بصورت زیرمینویسند :

$$\int_{\Gamma} [P(x , y)\, dy - Q(x , y)\, dx].$$

فرمول استروگرادسکی . روابط فوق‌العاده مهمی بین انتگرال در یك حجم معین (یا میدان معین) و انتگرال درسطح این حجم (یا حدود میدان) بصورت کاملا کلی، دراواسط قرن گذشته‌وبوسیله م . و . استروگرادسکی Ostrogradski کشف شد.

ما دراینجا اثبات کامل فرمول کلی استروگرادسکی را ذکر نمی کنیم، ولی آنرا در ساده ترین حالت خاص آن که مورد مصرف زیادی هم دارد، باذکر یك‌نمونه آزمایش میکنیم.

فرض کنیم که در سطح مسطح زمینی جویباری جاری باشد . ضمناً قسمتی از آب دائماً از زمین بیرون بیاید و یا بزمین داخل شود . میدانی مانند G که حدود آنرا Γ می‌نامیم ازآن جدا میکنیم وفرض می کنیم که برای هر نقطه ازاین میدان $P(x , y)$ و $Q(x , y)$ یعنی سرعت‌های آب درجهت محور x ها و محور y ها معلوم باشد.

میخواهیم حساب کنیم که درنزدیکی‌نقطه‌ای‌بمختصات (x , y)، آب با چه شدتی در زمین نفوذ میکند . برای اینکار مربع مستطیل کوچك باضلاع Δx و Δy راکه چسبیده بنقطه (x , y) انتخاب شده‌است، درنظرمیگیریم .

با توجه بسرعت $P(x,y)$، از ضلع قائم سمت چپ این مستطیل در هردقیقه تقریباً $P(x, y)\,\Delta y$ واحد آب و از ضلع قائم سمت‌راست‌این‌مستطیل در هر دقیقه تقریباً $P(x+\Delta x , y)\Delta y$ واحد آب جریان دارد . بطورکلی درواحد سطحی که بین مرزهای قائم سمت چپ وسمت راست این مستطیل کوچك قرار دارد، مقدارآبی باندازه :

$$\frac{[P(x+\Delta x , y)-P(x , y)]\ \Delta y}{\Delta x \,.\, \Delta y}$$

جریان دارد . اگر Δx را بسمت صفر میل دهیم درحد :

$$\frac{\partial P}{\partial x}$$

را بدست خواهیم آورد . بهمین‌ترتیب ازاین قطعه‌کوچك و درجهت محور xها آب با شدتی مساوی،

$$\frac{\partial Q}{\partial y}$$

جریان خواهد داشت . بنابراین شدت تراوش زمینی آب درنقطه بمختصات (x, y)

مساویست با:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

همانطورکه از قبل میدانیم ، مقدار کل آبی که از زمین خارج می شود برابراست باانتگرال مضاعف تابعی که شدت نفوذآب را درهرنقطه زمین بیان میکنند یعنی :

$$\iint_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy\,. \qquad (۵۲)$$

درهمین‌مدت همین مقدارآب بایستی ازحدود مرزهای Γ جریان داشته باشد.

اما همانطورکه قبلا دیدیم مقدار آبی که از مرزهای Γ جریان پیدا میکنند بوسیله انتگرال منحنی‌الخط درطول Γ بیان میشود :

$$\int_\Gamma[P(x,y)\cos(\bar{n},\bar{x})+Q(x,y)\cos(\bar{n},\bar{y})].\,ds \qquad (۵۳)$$

تساوی مقادیر(۵۲) و(۵۳) همان فرمول استروگرادسکی درساده ترین حالت دوبعدی آنست :

$$\iint_G\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_\Gamma[p(x,y)\cos(\bar{n},\bar{x})+$$
$$Q(x,y)\cos(\bar{n},\bar{y})]\,ds$$

ما فقط مفهوم این فرمول را روی نمونه فیزیکی آن ثابت کردیم ، درحالیکه میتوان آنرا بطریق ریاضی هم ثابت کرد .

بنابراین قضیه ریاضی استروگرادسکی قانون معینی از واقعیت را بیان میکنند که ما آنرا در مثال خود بعنوان مقدار مایعی که باقی میماند ، درك کردیم .

م . و . استروگرادسکی فرمول عمومی‌تر آنراکه عبارت ازارتباط بین‌انتگرال در حجم چند بعدی و انتگرال در حدود آن ، میباشد ثابت کرد . در حالت خاص ، برای یك جسم G سه بعدی که محدود بسطح Γ میباشد ، این فرمول بصورت زیر درمیآید :

$$\iiint_G\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$
$$=\iint_\Gamma[p\cos(\bar{n},\bar{x})+Q\cos(\bar{n},\bar{y})+R\cos(\bar{n},\bar{z})]d\sigma.$$

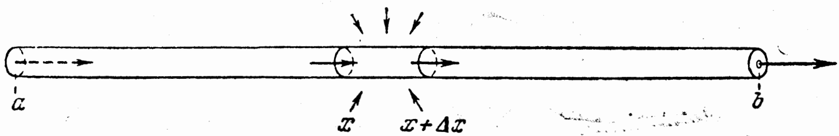
که درآن $d\sigma$ عنصر سطح است .

جالب است متذکر شویم که قضیه اساسی محاسبه انتگرال یعنی :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (54)$$

میتواند بعنوان حالت یك بعدی فرمول استروگرادسکی در نظر گرفته شود . تساوی (۵۴) عبارتست ازارتباط بین انتگرال درطول پاره خط با « انتگرال» درحدود « بدون بعد» آن که ازدونقطه ثابت تشکیل شده‌است .

فرمو (۵۴) را به طریق زیر هم میتوان روشن کرد : فرض میکنیم که در لوله مستقیمی با مقطع ثابت $S=1$ ، آب با سرعت $F(x)$ جریان داشته باشد . $F(x)$ برای مقاطع مختلف ، متفاوت است (شکل ۳۶) . از جدار منفذ دار لوله ، آب در جهات مختلف و با شدتهای‌مختلف به‌بیرون (یا بداخل) نفوذ می کند . اگرقطعه‌ای ازلوله از x تا $x+\Delta x$ را درنظر بگیریم ، مقدارآبی که در واحد زمان‌این‌قسمت



ش ۳۶

لوله ترشح میکند مساوی با تفاضل $F(x+\Delta x)-F(x)$ یعنی تفاضل مقادیرآبی که باین قسمت وارد میشود وازآن خارج میگردد ، میباشد . ازآنجا که مقدار آبی که این قسمت لوله ترشح میکند مساوی باتفاضل $F(x+\Delta x)-F(x)$ میباشد، شدت $f(x)$ که عبارت ازنسبت بین مقدار ترشح آب درقسمت‌بسیارکوچك‌لوله، بطول آن میباشد مساوی با :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

خواهد بود . کل آبی که به قطعه $[a و b]$ وارد شده بایستی مساوی باکل‌آبی باشد که ازاین قطعه خارج شده است . ولی درطول جدار لوله مجموعاً باندازه $\int_a^b fxdx$ آب بداخل نفوذکرده است و ازدوطرف لوله مقدارآبی باندازه $F(b)-F(a)$ از لوله خارج شده است . تساوی این دومقدار ، همان رابطه (۵۴) خواهد بود .

۱٤

سریها

مفهوم سری . عبارتی بصورت :

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots$$

را در ریاضیات سری Série می‌نامند . عدد u_k معرف جملات سری است . تعداد این جملات بی نهایت بوده و طبق قاعده معینی منظم شده اند ، بطوریکه هر عدد $k=0$ و ۱ و ۲ و . . . . . متناظر بامقدار معینی از u_k باشد .

بایستی توجه داشت که ما هنوز نگفته ایم که آیا اینگونه عبارات را میتوان محاسبه کرد یا نه و در صورت امکان چگونه باید محاسبه نمود ؟ در حالتی که بین جملات u_k علامت جمع وجودداشته باشد ، باین معنی‌است که تمام جملات را بایستی با یکدیگر جمع نمود . ولی از آنجا که تعداد جملات بی‌نهایت است ، این مجموع تنها برای مواقعی که تعداد جملات محدود باشد معین خواهد بود .

مجموع n جمله اول‌سری را به S_n نشان می‌دهیم وآنرا **مجموع جزئی n جمله** سری می‌نامیم . در نتیجه رشته اعداد متوالی زیر را بدست می آوریم .

$$S_1=u_0$$

$$S_2=u_0+u_1$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

و میتوان در باره مقدار متغیر S_n صحبت کرد که در آن $n=1$ و ۲ و . . . . .

میباشد .

سری را **متقارب** گویند Série Convergente وقتی که با میل n بسمت بی‌نهایت ، مقدار متغیر S_n بسمت حد معینی میل کند .

$$\text{حد}_{n\to\infty} S_n = S \cdot$$

خود این حد را **مجموع سری** مینامند . دراینحالت مینویسند .

$$S = u_۰ + u_۱ + u_۲ + \dots$$

اگر برای S_n وقتی $n\to\infty$ ، حدی وجود نداشته باشد . سری را **متباعد** گویند Série divergente و دراینحالت صحبت درباره مجموع آن مفهومی ندارد [۱] ولی اگر تمام جملات u_n دارای یك علامت باشند ، میتوان گفت که مجموع سری مساوی است بابی‌نهایت وعلامت آن مثبت یامنفی است ، بسته باینکه علامت جملات سری مثبت یامنفی باشد .

بعنوان مثال سری زیررا مورد مطالعه قرارمیدهیم :

$$۱ + x + x^۲ + \dots\dots$$

که جملات آن یك تصاعد هندسی را با قدر نسبت x تشکیل میدهد :

مجموع n جمله اول این سری چنین میشود .

$$S_n(x) = \frac{۱ - x^n}{۱ - x} \quad (x \neq ۱) \; ; \qquad (۵۵)$$

درحالتی که $|x| < ۱$ باشد این مجموع دارای حدی مساوی :

$$\text{حد}_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{۱}{۱ - x}$$

خواهد بود وبنابراین برای $|x| < ۱$ میتوان نوشت :

$$\frac{۱}{۱ - x} = ۱ + x + x^۲ + \dots$$

واگر $|x| > ۱$ باشد واضح است که :

$$\text{حد}_{n\to\infty} S_n(x) = \infty$$

۱ـ متذکر میشویم که امکان تعریف کلی مجموع سری درآنجا وجود دارد که بتوان «جملهٔ عمومی» برای مجموع جملات سری متباعد پیدا کرد . چنین سری را قابل جمع کردن گویند . بسیاری مواقع عمل کردن با جمله عمومی سریهای متباعد فوائد بسیار دربردارد .

و سری متباعد است . این حالت شامل وقتی که $x = ۱$ هم باشد ، میشود . در این حالت مستقیماً و بدون استعانت از فرمول (۵۵) ، متباعد بودن سری معلوم میشود . درحقیقت‌فرمول (۵۵) برای $x = ۱$ مفهومی‌ندارد . بالاخره بازاءِ $x = -۱$ مجموع جملات اول سری متناوباً مقادیر $+۱$ و صفر را قبول می‌کند وسری باز هم متباعد خواهد بود.

هرسری‌متناظر بادنباله Suite:

$$S_۱ \text{ و } S_۲ \text{ و } S_۳ \text{ و } \dots\dots$$

(مجموعهای جزئی) میباشد که بشرط متقارب بودن سری بسمت حدی میل میکند . برعکس هر دنباله اعداد :

$$S_۱ \text{ و } S_۲ \text{ و } S_۳ \text{ و } \dots\dots$$

متناظر با سری :

$$S_۱ + (S_۲ - S_۱) + (S_۳ - S_۲) + \dots\dots$$

خواهد بود کـه مجموعهای جزئی آن جملات این دنباله میباشد . بنا براین تئوری متغیرهائی که مقادیر یك دنباله را قبول میکنند ، میتوانـد بوسیله تئوری سریهـای متناظر آنهـا توجیه شـود و بر عکس . ولی هریك از این تئوریها اهمیت و معنای مخصوص بخودی دارد. درحالت اول متغیرمستقیماً موردمطالعه قرار میگیرد ودرحالت دوم سریهای معادل آن بررسی میشود .

متذکر میشویم که سریها از مدتها پیش ، بعنوان وسیله مهمی برای محاسبه و نمایش کمیت های مختلف وبخصوص توابع بکار میرفته است . بدیهی است که نقطه نظر ریاضی دانان درباره مفهوم سری ، درجریان تاریخ تغییر کرده‌است وارتباط دائمی با وضع تکاملی همه‌آنالیز بی‌نهایت کوچکها داشته است ، بطوریکه تعریف دقیق‌سری متقارب ومتباعد (تعریفی که دربالا ذکرشد) در اول قرن گذشته و همراه با مفهوم حد (که‌کاملا به‌آن مربوط است) تنظیم شد .

اگرسری متقارب باشد، جمله عمومی‌آن ، وقتی که n فوق‌العاده بزرگ شود بسمت صفرمیل می‌نماید ، زیرا :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, u_n = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, (S_{n+۱} - S_n) = S - S = ۰$$

ازامثله زیر روشن میشود که عکس این حکم همیشه صحیح نیست . ولی‌شرط مذکورمفیداست زیرا شرط **لازم** تقارب سری را معین‌میکند. مثلا وقتی که جملات یك‌سری ، جملات یك‌تصاعد هندسی‌است ، درحالتی که قدرنسبت $x > ۱$ باشد متباعد است ، زیرا جمله عمومي سري بسمت صفرميل نميكند .

اگریك سری ازجملات مثبت تشکیل شده باشد ، مجموع جزئی S_n همراه با n رشد میکند و دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد : یا متغیر S_n ، وقتی که n باندازه کافی بزرگ شود ، از عدد دلخواه مفروضی مانند A بزرگتر خواهد شد که دراینصورت بازاء مقادیر بعدی n همیشه بزرگتر از A باقی میماند و $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ یعنی سری متباعد است . یا اینکه عددی مانند A وجود دارد که بازاء تمام مقادیر n مقدار S_n از A بزرگتر نمیشود ودراینصورت متغیر S_n اجباراً بسمت حد معین محدودی میل میکند که بزرگتر از A نخواهد بود یعنی سری ما متقارب است .

تقارب سری . برای تعیین اینکه یك سری متقارب است یا متباعد ، غالباً از مقایسه آن بایك سری دیگراستفاده میکنند . ضمن این‌عمل هم اغلب ازحکم زیر استفاده میشود :

اگر دوسری :

$$u_0+u_1+u_2+\dots$$
$$v_0+v_1+v_2+\dots$$

با جملات مثبت مفروض باشد وبدانیم برای همه اعدادطبیعی n ، که ازیك عددد لخواه شروع شده‌است، نامساوی زیربرقراراست :

$$u_n \leqslant v_n$$

آنوقت اگر سری دوم متقارب باشد ، سری اول هم متقارب خواهد بود و اگر سری اول متباعد باشد ، سری دوم هم متباعد خواهد بود .

بعنوان مثال سری زیررا که سری همساز Série harmonique نامیده میشود در نظر میگیریم .

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots$$

جملات این سری متناظراً کوچکتر از جملات سری زیر نیست :

$$1+\underline{\frac{1}{2}}+\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\underbrace{\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}}_{\text{۸ مرتبه}}+\dots$$

و در این سری هم مجموع هر دسته جملاتی که زیر آنها خط کشیده ایم مساوی $\frac{1}{2}$

است .

واضح است که مجموع جزئی S_n سری دوم همراه با n تا بی‌نهایت زیادمیشود وبنابراین سری همساز متباعد است .

همچنین واضح است که سری :

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\dots\dots \qquad (56)$$

که در آن α عدد مثبت کوچکتر از واحدی است متباعد است ، زیرا برای هر عدد دلخواه n :

$$\frac{1}{n^{\alpha}}>\frac{1}{n} \qquad (0<\alpha<1)$$

ازطرف دیگرمیتوان ثابت کرد که سری(۵۶) بازاء $\alpha>1$ متقارب است ۰ دراینجا ما آنرا برای $\alpha\geqslant 2$ ثابت میکنیم ۰ برای این‌منظور سری :

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\dots$$

را که جملات آن مثبت اند درنظر میگیریم ۰ این سری متقارب بوده و مجموع آن مساوی واحد است ، زیرا مجموع جزئی S_n آن مساوی است با :

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}\to 1 \quad (n\to\infty)$$

ازطرف دیگر جمله عمومی این سری درنامساوی زیرصدق میکند .

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n-1)n}>\frac{1}{n^2}$$

و ازآنجا نتیجه میشود که سری :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\dots$$

هم متقارب است وبدیهی است که سری (۵۶) هم بازاء $\alpha>2$ متقارب خواهد بود ۰

دستور دیگری را که برای تعیین تقارب و تباعد سریهائی که جملات مثبت دارند بکارمیرود وبدستور دالامبر Regle de d'Alembert مشهوراست بدون استدلال ذکرمیکنیم :

فرض کنیم نسبت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ وقتی که n بسمت بی‌نهایت میل‌میکند، دارای حدی

مساوی q باشد ، در اینصورت اگر $q<1$ باشد سری متقارب و اگر $q>1$ باشد سری متباعد است. برای $q=1$ تقارب یا تباعد سری معلوم نیست .

معمولا مجموع چند عدد با تغییر محل جملات آن تغییر نمی‌کند، ولی این مطلب غالباً برای سریهای بی نهایت صادق نیست . سریهـای متقاربی وجود دارد که میتوان با تغییر جای جملات درآنها ، مجموع آنها را تغییرداد وحتی آنها را بسری متباعد تبدیل کرد . این ناپایداری مجموع در سریها ، یکی از خواص اساسی جمع معمولی را که بموجب آن : حاصل جمـع به ترتیب عوامل جمـع بستگی ندارد ، نقض می کند . بنابر این خیلی مهم است کـه بتوانیم سریهائی را پیدا کنیم کـه این خاصیت جمع معمولی را حفظ می کنند . اینگونه سریها را **متقـارب مطلق** Série Convergence obolue گویند . سری .

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\dots$$

را متقارب مطلق گویند وقتی که سری :

$$|u_0|+|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots$$

که ازقدرمطلقهای جملات آن تشکیل شده است ، نیز متقارب باشد . میتوان ثابت کرد که سری متقارب مطلق همیشه متقارب است یعنی مجموع جزئی S_n آن بسمت حد معینی میل میکند . واضح است که همه سریهای متقاربی که جملات هم علامت دارند متقارب مطلق‌اند .

سری :

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\dots$$

را میتوان بعنوان نمونه‌ای ازسری متقارب مطلق ذکر کرد ، زیرا سری:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2x}{2^2}\right|+\left|\frac{\sin 3x}{3^2}\right|+\dots.$$

دارای جملاتی است که ازجملات سری متقارب زیربزرگتر نیستند :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$$

بعنوان نمونه سری‌متقاربی که متقارب‌مطلق نباشد ، می‌توان سری زیر را ذکر کرد :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

صحت این حکم را میتوان بسادگی ثابت کرد .

سری توابع، سری متقارب یکنواخت . درآنالیزاغلب اتفاق میافتد که سروکار ما با سریهائیست که جملات آنها توابعی از x میباشد، قبلا نمونه هائی ازاین سریها آوردیم، مثلا سری :

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

این سری بازاء مقادیری از x متقارب و بازاء مقادیری از x متباعد است . توابعی وجود دارد که بازاءِ همه مقادیر متعلق بیك فاصله متقارب اند و بخصوص ممکن است که این فاصله تمام نقاط یك محور تا نیم محوررا بپوشاند . اینسریها درعمل اهمیت زیادی دارند و بهمین علت بایستی راه محاسبه دیفرانسیل و انتگرال جملات اینگونه سریها را پیدا کرد و مسئله مربوط باتصالی بودن مجموع آنها را روشن نمود وغیره . اگرمنظور ازمجموع، مجموع معمولیِ تعداد معینی از جملات سری باشد، قواعد ساده و کلی برای موارد مذکوره وجود دارد . میدانیم مشتق مجموع توابعی که قابل دیفرانسیل گیری هستند، برابراست بامجموع مشتقاتآنها . انتگرال مجموع توابع اتصالی مساویست با مجموع انتگرالهای آنها . مجموع چند تابع اتصالی بنوبه خود یك تابع اتصالی است و غیره . ولی همین قواعد برای موقعی است که تعداد جملات محدودباشد.

ولی وقتی که سرو کار ما باسری بی‌نهایت باشد بایستی از همه این قواعد دست برداشت . میتوان امثلهٔزیادی ازسری‌توابع متقارب ذکر کرد که قاعده انتگرال گیری و یا دیفرانسیل گیری جمله بجمله در بارهٔ آنها صادق نباشد . بهمین ترتیب میتوان سریهائی را مثال زد که از توابع اتصالی بدست آمده باشند، ولی مجموع آنها تابع اتصالی نباشد . از طرف دیگر سریهای زیادی هم وجود دارد که از نظر این قواعد دارای همان خواص مجموع محدود معمولی هستند .

مطالعات عمیقی که در اینزمینه انجام گرفت نشان داد که میتوان صحت بکار بردن این قواعد را از قبل تضمین کرد . بدین معنی که زمانی میتوان اینقواعدرا بکار برد که سری مورد مطالعه نه تنها درهریك ازنقاطفاصله مورد بررسی (فاصله تغییرx) متقارب باشد، بلکه این تقارب دراین فاصله یکنواخت هم باشد. باین ترتیب درآنالیز ریاضی (دراواسط قرن نوزدهم) مفهوم مهم سری متقاربیکنواخت بوجودآمد .

سری زیر را درنظر میگیریم ؛

$$S(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots$$

جملات این سری توابعی ازx هستند که در فاصله $[a \text{ و } b]$ معین‌اند . فرض میکنیم که اینسری بازاء هرمقدارx (متعلق باینفاصله) متقارب بوده وبسمت مجموع$S(x)$

میل کند، مجموع n جمله اول این سری :

$$S_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+\dots+u_{n-1}(x)$$

هم تابعی است از x که درفاصله $[a \text{ و } b]$ معین است .

اکنون مقدار η_n را که مساوی با کنار بالای Borne supérieure مقدار $|S(x)-S_n(x)|$ است [1] ، (وقتی که x درفاصله $[a \text{و} b]$ تغییرمی کند)، در نظر میگیریم . این مقدار را چنین مینویسند :

$$\eta_n=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|S_n(x)-S(x)|$$

درحالتی که مقدار $|S(x)-S_n(x)|$ دارای ماکزیممی باشد(بطوریکه میدانیم وقتی که تابع متصل باشد حتماً ماکزیممی هم خواهد داشت) . η_n ماکزیمم معمولی $|S(x)-S_n(x)|$ درفاصله $[a \text{ و } b]$ خواهد بود . [2]

ازآنجاکه سری متقارب است ، بنابرین بازاء هرمقدار x متعلق بفاصله $[a \text{و} b]$ خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty}|S(x)-S_n(x)|=0$$

ولی مقدار η_n میتواند دراین ضمن بسمت صفر میل کند ویا میل نکند . اگرمقدار η_n وقتی که $n\to\infty$ بسمت صفرمیل‌نماید سری را **متقارب یکنواخت** گویند درحالت عکس سری متقارب غیر یکنواخت خواهد بود . بهمین مفهوم میتوان در باره تقارب یکنواخت و یا تقارب غیریکنواخت توابع متوالی $S(x)$ صحبت کرد ، بدون اینکه مجبور باشیم سری راکه این توابع ازمجموعهای جزئی‌آنها بوجودآمده‌است ، درنظربگیریم .

مثال ۱ . سری توابع زیر را درنظر میگیریم :

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\dots$$

این سری توابع تنها بازاء مقادیر مثبت x ، یعنی روی نیم خط $(0 \text{ و } \infty)$ معین میباشد وآنرا میتوان بصورت زیرنوشت :

۱ـ فصل پانزدهم را به‌بینید.

۲ـ sup خلاصه کلمه لاتین superior (بالاترین) میباشد.

$$\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots$$

از آنجا مجموع جزئی آن چنین خواهد شد:

$$S_n(x)=\frac{1}{x+n}$$

و

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\; S_n(x)=0$$

بنابراین، سری بازاء همه مقادیر مثبت x متقارب بوده و در آن $S(x)=0$ خواهد بود. علاوه برآن:

$$\eta_n=\sup_{0\leqslant x\leqslant\infty}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{0\leqslant x\leqslant\infty}\frac{1}{x+n}=$$

$$=\frac{1}{n}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

وسری روی نیم‌خط $[0, \infty)$ متقارب یکنواخت است. درشکل ۳۷ نمایش تغییرات مجموع $S_n(x)$ رسم شده‌است.

مثال ۲. سری:

$$x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots$$

رامیتوان بصورت‌زیر نوشت:

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots$$

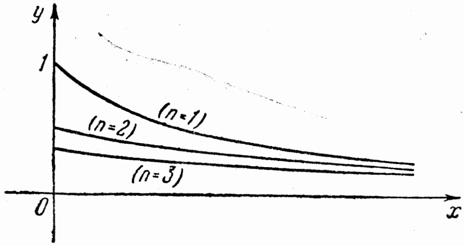
و ازآنجا:

$$S_n(x)=x^n,$$

وبنابراین:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\; S_n(x)=\begin{cases}0 & \text{وقتی که } 0\leqslant x<1\\ 1 & \text{وقتی که } x=1\end{cases}$$

بنا براین مجموع سری درفاصله $[0, 1]$ منفصل است و نقطه انفصال آن $x=1$ میباشد. مقدار $[S_n(x)-S(x)]$ بازاء هر مقدار دلخواهی از فاصله $[0, 1]$

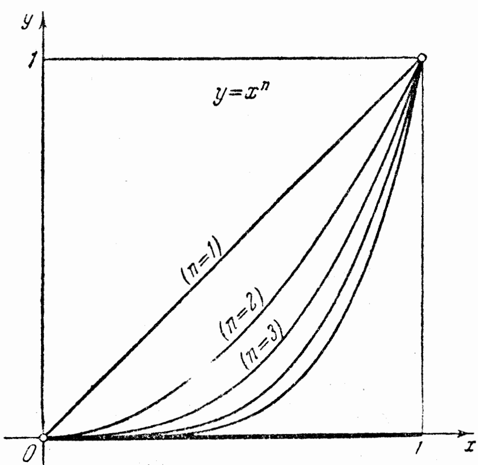


ش ۳۷

کوچکتر از واحـد است ، ولی وقتی که x به $x=1$ نزدیك میشود ، این مقدار باندازه کافی بواحد نزدیك خواهدشد. ازآنجا بازاء همه مقادیر $n=1$ و ۲ و . . . . . خواهیم داشت :

$$\eta_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_n(x) - S(x)| = 1$$

بنابراین سری ما در فاصله [۱ و ۰] متقارب غیریکنواخت‌است . درشکل ۳۸منحنی نمایش تغییرات تابع $S_n(x)$ نشان داده شده است . منحنی مجموع سری تشکیل شده است از فاصله $0 \leqslant x < 1$ (بدون انتهای راست) و ازنقطه منفرد (۱ و ۱).



ش ۳۸

این مثال نشان می‌دهد که مجموع سری توابع اتصالی ، وقتی که متقارب یکنواخت نباشد ، ممکن است تابع منفصلی ازآب درآید .

ازطرف دیگر این سری درفاصله $q \geqslant x \geqslant 0$ که در آن $q < 1$ است مطالعه شود خواهیم داشت :

$$\eta_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant q} |S_n(x) - S(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant q} x^n = q^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

وبنابراین سری ما دراین فاصله ، متقارب یکنواخت و مجموع آن هم ، همانطور که دیده میشود ، متصل است . این کیفیت که مجموع سری متقارب یکنواخت از توابع اتصالی ، خود تابع اتصالی است یك قاعدهٔ کلی است که می‌توان آنرا با دقت تمام ثابت نمود .

مثال ۳ . مجموع n جمله اول سری $S_n(x)$ با خط شکسته‌ای که پررنگتر چاپ شده در شکل ۳۹ نشان داده شده است . واضح است که برای تمام مقادیر n خواهیم داشت : $S_n(0) = 0$ ؛ همچنین اگر $1 \geqslant x > 0$ باشد باز هم بازاء تمام مقادیر $n \geqslant \frac{1}{x}$ خواهیم داشت : $S_n(x) = 0$ ، بنا بر این برای هر مقدار x از فاصله $[0 , 1]$:

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = 0$$

ازطرف دیگر :

$$\eta_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_n(x) - S(x)| = \sup |S_n(x)| = n^2$$

می بینیم که مقدار η_n بسمت صفر میل نمی کند ، بلکه حتی بسمت بی نهایت میل میکند . متذکرمیشویم که ازسری متناظر بادنباله مورد مطالعه $S_n(x)$ نمیتوان عضو بعضو درفاصله $[0 , 1]$ انتگرال گرفت زیرا .

$$\int_0^1 S(x)dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 S_n(x)dx = \frac{1}{2}n^2 \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

و بنابراین سری :

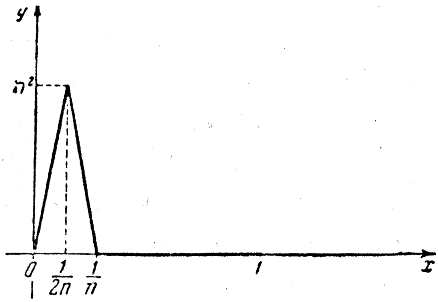
$$\int_0^1 S_1(x)dx + \int_0^1 [S_2(x) - S_1(x)]dx + \int_0^1 [S_3(x) - \\ - S_2(x)]dx + \dots .$$

منجر بسری متباعد زیرمیشود :

$$\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۲}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{۲}\right)+\left(\frac{٤}{۲}-\frac{۳}{۲}\right)+\ldots\ldots$$

خـواص اسـاسی سریهـای متقارب یکنواخت را بدون اثبات ذکرمیکنیم :

۱ ـ مجموع سری از توابع متصل کـه در فاصله $[a \text{ و } b]$ متقارب یکنواخت باشد ، تابعی‌است که دراین فاصله متصل است ،



ش ۳۹

۲ ـ اگر سری توابع متصل :

$$S(x)=u_۰(x)+u_۱(x)+u_۲(x)+\ldots. \qquad (۵۷)$$

در فاصله $[a \text{ و } b]$ متقارب یکنواخت باشد ، میتوا ن از آن دراین فاصله عضو بعضو انتگرال گرفت . یعنی برای همه مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ از فاصله $[a \text{ و } b]$ تساوی زیرصحیح خواهد بود :

$$\int_{x_۱}^{x_۲} S(t)dt=\int_{x_۱}^{x_۲} u_۰(t)\,dt+\int_{x_۱}^{x_۲} u_۱(t)dt+\ldots.$$

۳ـ فرض کنید که سری (۵۷) در فاصله $[a \text{ و } b]$ متقارب باشد و توابع $u_k(x)$ دارای مشتقات متصل باشند ، دراینصورت تساوی :

$$S'(x)=u_۰'(x)+u'_۱(x)+u'_۲(x)+\ldots \qquad (۵۸)$$

که بوسیله دیفرانسیل گیری عضو بعضو از سری (۵۷) بدست آمده‌است ، در فاصله $[a \text{ و } b]$ صحیح خواهد بود ، مشروط براینکه سری سمت راست تساوی (۵۸) متقارب یکنواخت باشد .

سری تام Série entière . درقسمت ۹ ، تابع $f(x)$ را که درفاصله $[a \text{ و } b]$ داده شده است تحلیلی نامیدیم وقتی که دراین فاصله دارای‌مشتق از هرمرتبه‌ای باشدو درمیدان کوچکی دراطراف نقطه دلخواه $x_۰$ ازفاصله $[a \text{ و } b]$ به سری‌متقارب تیلور تجزیه شود :

$$f(x)=f(x_۰)+\frac{f'(x_۰)}{۱}(x-x_۰)+\frac{f''(x_۰)}{۲!}(x-x_۰)^۲+\ldots. \qquad (۵۹)$$

اگر قرار بگذاریم که :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_.)}{n!}$$

آنوقت این سری را بصورت زیرهم میتوان نوشت :

$$f(x) = a_. + a_۱(x - x_.) + a_۲(x - x_.)^۲ + \ldots \qquad (۶۰)$$

هرسری ازاین قبیل که درآن $a_۱$ و $a_۲$ و . . . مقدار ثابتی‌بوده وبه x مربوط نباشد ، درریاضیات سری تام نامیده میشود .

بعنوان مثال سری زیررا که جملات‌آن تشکیل یك تصاعد هندسی میدهند ، مطالعه می کنیم :

$$۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots \qquad (۶۱)$$

میدانیم که بازاءِ مقادیری از x که فاصله $-۱ < x < ۱$ واقع باشد، این‌سری‌متقارب بوده ومجموع آن مساویست با :

$$S(x) = \frac{۱}{۱ - x}$$

و بازاء سایرمقادیر x ، سری متباعداست .

همچنین بسادگی دیده میشود که اختلاف بین مجموع سری ومجموع n جمله اول آن بوسیله رابطه زیر معین میشود :

$$S(x) - S_n(x) = \frac{x^n}{۱ - x}$$

و اگر $-q \leqslant x \leqslant q$ باشد (که درآن q عددی است مثبت و کوچکتر ازواحد) درآنصورت:

$$\eta_n = \max |S(x) - S_n(x)| \frac{q^n}{۱ - q}$$

ازآنجا دیده میشود که η_n با بزرگ شدن n بسمت صفرمیل میکنند و تقارب سری در فاصله $-q \leqslant x \leqslant q$ که در آن q عددی مثبت و کـوچکتر از واحد است ، یکنواخت می‌باشد .

بسادگی میتوان تحقیق کرد که تابع :

$$S(x) = \frac{۱}{۱ - x}$$

دارای مشتق مرتبه n امی مساوی با :

$$S^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

خواهد بود وازآنجا :

$$S^{(n)}(0)=n!$$

ومجموع n جمله اول رابطه تیلور ازتابع $S(x)$ بازاءِ $x=0$ دقیقاً مساوی بامجموع n جمله اول سری (۵۹) خواهد شد . علاوه برآن میدانیم که جمله باقیمانده رابطه که بوسیله تساوی (۶۲) نشان داده شده است ، با بزرگ شدن n بازاءِ مقادیری از x که درفاصله $-1<x<1$ باشد بسمت صفرمیل میکند . باین ترتیب ثابت شد که سری (۶۱) همان سری تیلور مجموع خود آن یعنی $S(x)$ خواهد بود .

بمطلب دیگری هم توجه کنیم . درفاصله تقارب سری نقطه دلخواهی مانند x_0 انتخاب میکنیم ، بسادگی دیده میشود که بازاءِ مقادیری از x که باندازهٔ کافی به x_0 نزدیك باشد وبخصوص بازاء مقادیری که دررابطه زیرصدق نماید :

$$\frac{|x-x_0|}{1-x_0}<1$$

تساوی زیر صادق خواهد بود :

$$S(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x_0}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1-x_0}\left[1+\frac{x-x_0}{1-x_0}+\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2+\dots\right]= \tag{63}$$

$$=\frac{1}{1-x_0}+\frac{x-x_0}{(1-x_0)^2}+\frac{(x-x_0)^2}{(1-x_0)^3}+\dots$$

خواننده بدون زحمت میتواند بصحت رابطه زیر متقاعد شود :

$$\frac{S^n(x_0)}{n!}=\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}$$

بنابراین ، سری (۶۳) سری تیلور مجموع خود آن یعنی $S(x)$ است و بازاء مقادیری از x که درمیدان کوچکی اطراف x_0 (و باندازهٔ کافی نزدیك به آن) واقع باشد ، بسمت $S(x)$ میل میکند و از آنجا که نقطه x_0 نقطه دلخواهی است ، این مطالب باین معنی است که $S(x)$ تابعی است که دراین فاصله تحلیلی است .

همه آنچه را که دراینجا دربارهٔ سری تام خاص (۶۱) ذکر کردیم ، برای هر سری تام دلخواهی صحیح است[1]. بخصوص اگر سری تامی بصورت (۶۰) که در آن a_k عدد دلخواهی بوده وطبق قانونی معین شود ، درنظر بگیریم ؛ میتوان‌عددی مانند R (که منفی نیست و بخصوص میتواند بسمت ∞ هم‌میل کند) بآن نسبت داد که **شعاع تقارب** Rayon de convergence سری (۶۰)نامیده‌میشود ودارای خواص زیرمیباشد :

۱ــ بازاءِ مقادیری از x که درفاصله $x_0-R<x<x_0+R$ واقع است (و فاصله تقارب نامیده میشود) سری متقارب بوده ومجموع آن $S(x)$ ، دراین فاصله تابعی تحلیلی از x است . ضمناً این تقارب درتمام فاصلد $[a$ و $b]$ که کاملا برفاصله تقارب منطبق است ، یکنواخت میباشد . خود سری عبارتست ازسری تیلور مجموع آن .

۲ــ سری درانتهای فاصلهٔ تقارب ، بسته بخواص‌مربوط بخود سری ، ممکنست متقارب یامتباعد باشد. اما بهرترتیب درخارج فاصله بسته$x_0-R\leqslant x\leqslant x_0+R$ متباعدخواهد بود .

پیشنهاد میکنیم که خواننده سریهای تام زیررا مطالعه کند :

$$۱+\frac{x}{۱}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\ldots$$

$$۱+x+۲!x^۲+۳!x^۳+\ldots$$

$$۱+x+\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}+\ldots$$

که اولین آنها دارای شعاع تقاربی مساوی بی‌نهایت ودومی مساوی صفر وسومی مساوی با واحد میباشد .

طبق تعریفی که دربالا کردیم ، هرتابع تحلیلی درمیدانی که باندازه کافی نزدیك به نقطه مفروضی از آن باشد ، بیك سری تام متقارب تجزیه میشود . بر عکس از آنچه که گفته شد نتیجه میشود که هرسری تام ، بشرطی که شعاع تقارب آن مساوی صفر نباشد ، درفاصله تقارب دارای مجموعی است که تابعی تحلیلی خواهد بود .

بنابراین می‌بینیم که سریهای تام ازنظر عضوی با توابع تحلیلی مربوط انـد . همچنین میتوان گفت که سریهای تام در فاصله تقارب خود وسیله طبیعی برای نمایش توابـع تحلیلی هستند و بنابر این وسیلهٔ طبیعی تقریب توابـع تحلیلی با کمك چند

۱ــ مشروح این مطلب را درفصل نهم به بینید .

جمله ایهای جبری میباشند[1].

مثلا ازآنجاکه تابع $\frac{1}{1-x}$ درفاصله $-1<x<1$ بسری متقارب :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+x^{3}+\dots$$

تجزیه میشود ، نتیجه میشود که این‌سری درهرفاصله دلخواهی مثل $-a\leqslant x\leqslant a$ (که درآن $a<1$ است) متقارب یکنواخت است وازاینجا امکان محاسبه تقریبی این تابع در فاصله $[-a$ و $a]$ بکمك مجموع جزئی سری مورد مطالعه ، با تقریبی که دقت آن ازقبل معین شده ، بدست می‌آید :

فرض کنیم که لازم است تابع $\frac{1}{1-x}$ را درفاصله $[-\frac{1}{2}$ و $+\frac{1}{2}]$ با دقت ۰/۰۱ تقریب بوسیلهٔ یك چند جمله‌ای نشان دهیم . متذکر میشویم که برای همه مقادیر x که دراین فاصله واقع باشد ، نامساوی زیر برقراراست :

$$\left|\frac{1}{1-x}-1-x-\dots-x^{n}\right|=\left|x^{n+1}+x^{n+2}+\dots\right|\leqslant$$

$$\leqslant|x|^{n+1}+|x|^{n+2}+\dots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\dots=\frac{1}{2^{n}}$$

و ازآنجاکه $64=2^{6}$ و $128=2^{7}$ ، چندجمله‌ای موردجستجو ازتابع‌مورد مطالعه‌درتمام امتدادفاصله $[-\frac{1}{2}$ و $+\frac{1}{2}]$ با دقت ۰/۰۱ تقریب بصورت زیر در خواهدآمد:

$$\frac{1}{1-x}\#1+x+x^{2}+\dots+x^{7}$$

باز هم یکی ازخواص پر ارزش سریهای تام را متذکرمیشویم ، ازآنها میتوان درفاصله تقارب جمله بجمله دیفرانسیل گرفت .

این خاصیت برای حل مسائل مختلفی در ریاضیات مورد استفاده دارد .

مثلا فرض کنید که میخواهیم جواب معادله دیفرانسیل $y'=y$ را پیدا کنیم

---

[1]ــ برای محاسبه تقریبی درخارج ازحدود فاصله تقارب سری تام ، روشهای دیگری بکار میرود (فصل دوازدهم را به بینید) .

بشرطی که علاوه‌برآن بدانیم $y(0)=1$ ، حل آنرا بصورت سری تام جستجو کنیم :

$$y=a_0+a_1+a_2x^2+\cdots\cdots$$

بعلت شرط اضافی بایستی $a_0=1$ باشد ، فرض میکنیم که این سری متقارب باشد ، دراینصورت میتوانیم ازآن جمله بجمله دیفرانسیل بگیریم درنتیجه خواهیم داشت :

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots$$

باقراردادن این دوسری درمعادله دیفرانسیل ومساوی قراردادن ضرایب قوای مساوی در طرفین خواهیم داشت :

$$a_k=\frac{1}{K!}\quad (K=1\text{ و }2\text{ و }\cdots\cdots)$$

وجواب مورد جستجو بصورت زیرخواهد بود .

$$y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdot$$

روشن‌است که این‌سری برای همه مقادیر x متقارب بوده ومجموع آن مساوی $y=e^x$ خواهدبود .

دراینحالت مجموع سری ، یك‌تابع مقدماتی شد. ولی این اتفاق همیشه نمی‌افتد : ممکن‌است جواب‌مسئله ، سری تام متقاربی باشد که مجموعش برابرباهیچ تابع مقدماتی نشود. مثلا سری :

$$y_p(x)=x^p\left[1-\frac{x^2}{2(2p+2)}+\frac{x^4}{2\times4(2p+2)(2p+4)}-\cdots\cdot\right]$$

که بعنوان جواب تقریبی معادله دیفرانسیل بسل Bessel بدست می‌آید ، بنا براین سریهای تام وسیله‌ای برای تشکیل توابع جدید هم می‌باشد .

پایان

فهرستها

ا

فهرست اسامی خاص

۲

فهرست لغات

Aérodynamique	آئرودینامیك
Algorithme	آلگوریتم ـ روش کلی
Amplitude	فاصله تغییرات
Analyse I	آنالیز
Analyse II	تجزیه ـ تحلیل
Analyse fonctionnelle	آنالیز فونکسیونل
Analyse infinitésimale	آنالیز بی نهایت کوچکها
A priori	حضوری
Astronomie	نجوم
Atome	اتم
Axiome	اصل ـ اصل متعارفی
Borne supérieure	کنار بالا
Borne intérieure	کنار پائین
Calcul des probabilité	حساب احتمالات
Calcul de varience	حساب واریانس

Calcul différentiel et intégral	حساب دیفرانسیل وانتگرال ـ حساب فاضله وجامعه
Caractéristique	خصیصه ـ خصلت ـ خصوصیت ویژه ـ جنبه
Changement de variable	تغییر متغیر
Complexe	مختلط
Concret	مشخص ـ متحقق
Conventionalisme	کنوانسیونالیسم
Cosinus	کسینوس ـ جیب تمام
Cotangent	کتانژانت ـ ظل تمام
Cristallographie	بلورشناسی
Cycloïde	سیکلوئید
Dérivable	دارای مشتق ـ قابل مشتق گیری
Dérivée partiell	مشتق جزئی
Determination	علم تعین و تشخص
Différentiable	دارای دیفرانسیل ـ قابل دیفرانسیل گیری
Différentielle	دیفرانسیل
Diffusion	نفوذ
Dogme	دگم ـ جزم
Elasticité	نظریهٔ جهمندی
Electro-Magnetique	الکترومغناطیس
Electron	الکترون
Electro technique	الکترو تکنیك
Ellipse	بیضی
Energie	انرژی
Ensemble	مجموعه
Finslerov	فضای فینسلروفی

Fonction	تابع
Fonction explicite	تابع صریح
Fonction implicite	تابع ضمنی
Formalisme	فرمالیسم - اصالت شکل
Forme	فرم ـ شکل ـ صورت
Formule	فرمول ـ دستور
Formule des accroisements finis	دستور نموهای‌محدود
Formule de la moyenne	دستور میانه
Géologie	زمین شناسی
Gèometrie analytique	هندسهٔ تحلیلی
Granulé	اجسام دانه‌ای
Homogène	متجانس ـ یکنواخت
Humaniste	اومانیست
Hydrodynamique	هیدرودینامیك
Hydro-électrique	هیدرو الکتریك
Hyperbole	هذلولی
Idéalisme	ایده‌آلیسم ـ ذهنی ـ اصالت ایده
Idée	ایده ـ فکر
Idéologie	ایده ئولوژی ـ طرز تفکر
Imaginaire	موهومی
Intégragle	دارای انتگرال ـ قابل انتگرال گیری
Intégrale elliptique	انتگرال الیپتیك ـ انتگرال بیضوی
Intégrale indéfinie	انتگرال نامعین
Intégration par parties	انتگرال گیری جزء بجزء
Intuitionisme	اشراق
Irrationnel	گنگ ـ اصم

Limite	حد
Logarithme	لگاریتم
Logarithme naturel	لگاریتم طبیعی
Logarithme néperien	لگاریتم نپری
Logitisme	اصالت منطق
Maximum	ماکزیمم ـ حد اکثر
Maximum relatif	ماکزیمم نسبی
Mesure	مقیاس
Metaphysique	متافیزیك ـ ماوراء الطبیعه
Méthode	متد ـ روش ـ اسلوب
Méthodologie	متدولوژی ـ منطق علمی
Micromire	میکرومیر
Minimum	می نیمم ـ حداقل
Module	مدول
Nombre complexe	عدد مختلط
Organique	ارگانیك ـ ساختمانی
Parabole	سهمی ـ شلجی
Paraboloïd	پارابولوئید ـ سهموی
Périodique	دوره‌ای
Phénomène	فنومن ـ پدیده
Point d' inflexion	نقطهٔ عطف
Point isolé	نقطه منفرد
Points Stationnaire	نقاط ساکن
Postulat	اصل موضوع
Pratique	پراتیك ـ عمل
Procès	پروسه ـ سیر ـ جریان
Progression	تصاعد
Quadrature	تربیع
Racine	ریشه ـ جواب

Racine carrée	جذر ـ ریشهٔ دوم
Racine imaginaire	جواب موهومی
Rationnel	عقلانی
Rationnele	گویا ـ منطق
Rayon de convergence	شعاع تقارب
Renaissance	رنسانس ـ تجدد
Self induction	خود القائی
Sèrie	سری
Sèrie convergente	سری متقارب
Sèrie convergente obsolue	سری متقارب مطلق
Sèrie divergente	سری متباعد
Sèrie entière	سری تام
Sèrie harmonique	سری همساز
Sinus	سینوس ـ جیب
Sistème	سیستم ـ دستگاه
Statique	استاتیك ـ ایست
Suite	دنباله
Syntèse	ترکیب
Symbole	رمز ـ علامت
Symbolisme	سمبولیسم ـ استعاری بودن
Tangente	تانژانت ـ ظل
Tecknique	تکنیك ـ فن ـ صناعت
Tenseur	تانسور
Théorie	تئوری ـ نظریه
Théorie des groupes	نظریهٔ گروهها
Thérmographe	ترموگراف
Thérmo_technique	تکنیك حرارتی
Topologie	توپولوژی ـ مکان شناسی
Trigonometrie	مثلثات
Vecteur	وکتور ـ بردار ـ حامل

فهرست مطالب

تصحیح چند اشتباه چاپی

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۶	۸	نیتجه گیریها	نتیجه گیریها
۱۸	۱۳	بنما ثیم	بنمائیم
۱۸	۱۶	تشخیص خواص	خواص
۲۶	۱۰	ارشیمدس	ارشمیدس
۲۹	۲	داثماً	دائماً
۳۸	۲۰	شود	نشود
۳۸	۲۸	رشته‌هائی که‌از	رشته‌هائی‌از
۳۹	۱۳	${}^{۲}={}^{۲}+{}^{۲}$	$b^{۲}=a^{۲}+a^{۲}$
٤۷	۵	میکنید	میکند
٤۸	۲۰	خاصبت	خاصیت
۵۷	۲۲و۲۳و۲٤و۲۵	لگارتیم	لگاریتم
٦۲	۱۹	لگارتیم	لگاریتم
۷۹	آخر	مشخض	مشخص
۸٤	۲۱	طروف	ظروف
۸٤	۲۸	مناسب	مناسبت
۹۰	۲٤	نطریه‌ها	نظریه‌ها
۱۰۱	۲٤	عدی	عددی
۱۰۵	٤	لاو نتیف	لاورنتیف
۱۱۰	شماره شکل	شکل۲	شکل۱
۱٤۰	مربوط به‌ش۹-d	(جزءصحیح عدد x)	$y=[x]$ (جزءصحیح عدد x)
۱٤۲	۱۰	—	(۹)
۱٦٦	۲۰	زاویه را α	زاویه α
۱۷۱	٤	ماتند	مانند
۱۷۸	۹	دوصفحه	درصفحه
۱۸٤	۲٤	$\frac{f^{n}(a)}{n!}$	$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$
۱۹۱	۱۰	[bوa]	[aوb]
۲٤۰	۱۰	obolue	obcolue

کسانی‌که درچاپ این‌کتاب شرکت داشته‌اند :

فرم بند : مرتضی ناظری

حروفچین : علی جوادی ـ جعفر اخوت

ماشین‌چی : شکراله سلیمانپور